

فصل ۴

سینماتیک سیال

اهداف

با مطالعه این فصل، شما باید قادر باشید:

- قاعده مشتق مادی در تبدیل میان توصیفات لاگرانژی و اویلری را درک کنید.
- اختلاف بین انواع مختلف روش‌های مشاهده جریان و روش‌های ترسیم مشخصه‌های جریان سیال را تشخیص دهید.
- شیوه‌های مختلفی را که سیالات حرکت کرده و تغییر شکل می‌دهند درک کنید.
- براساس خاصیت گردابی، نواحی چرخشی و غیرچرخشی را تشخیص دهید.
- اهمیت تئوری انتقال رینولدز را درک کنید.

سینماتیک سیال به تشریح حرکت سیالات بدون توجه به نیروها و گشتاورهای عامل حرکت می‌پردازد. در این فصل مفاهیم مختلف سینماتیکی مرتبط با جریان سیالات را معرفی می‌کنیم. در ارتباط با مشتق مادی و نقش آن در تبدیل معادلات بقاء از شکل لاگرانژی جریان سیال (دنبال کردن ذره سیال) به شکل اویلری آن (وابسته به میدان جریان) بحث می‌کنیم. سپس در مورد روش‌های مختلف مشاهده میدان‌های جریان، خطوط جریان، خطوط اثر، خطوط مسیر، خطوط زمان، روش‌های چشمی، چلیرن و سایه‌پردازی صحبت می‌کنیم و سه روش ترسیم اطلاعات جریان را به صورت ترسیم‌های پروفیلی، ترسیم‌های برداری و ترسیم‌های کانتوری

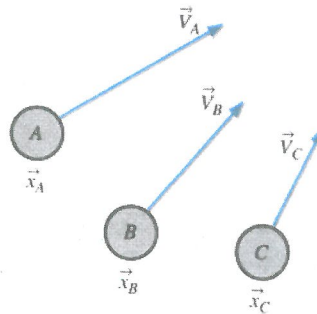
تشریح می‌کنیم. در مورد چهار خاصیت اساسی سینماتیکی حرکت سیال و تغییر شکل یعنی نرخ انتقال، نرخ چرخش، نرخ کرنش خطی و نرخ کرنش برشی بحث خواهیم کرد. هم‌چنین مفاهیم گردابی، چرخشی و غیر چرخشی در جریان‌های سیال بحث خواهند شد. سرانجام تئوری انتقال رینولدز RTT را تشریح کرده و در مورد نقش آن در تبدیل معادلات حرکت یک سیستم به معادلات مربوط به ورود و خروج جریان سیال به داخل یا خارج یک حجم معیار تأکید می‌کنیم. تشابه میان مشتق مادی برای المان‌های بسیار کوچک سیال و RTT برای حجم معیارهای محدود تشریح می‌شود.

۴-۱ توصیف‌های لاگرانژی و اویلری

موضوع سینماتیک به بررسی حرکت می‌پردازد. در دینامیک سیالات، سینماتیک سیالات چگونگی جریان سیالات و حرکت آنها را مطالعه می‌کند. از یک نقطه نظر اساسی، دو روش متمایز برای تشریح حرکت وجود دارد. اولین و آشناترین روش، آن چیزی است که شما در درس فیزیک دبیرستان یاد گرفته‌اید. یعنی دنبال کردن مسیر اشیای منفرد. به عنوان مثال، همه ما حرکت توپ بلیارد یا توپ هاکی و برخورد آن با توپ‌های دیگر یا دیواره‌ها را دیده‌ایم (شکل ۴-۱). برای تشریح حرکت چنین اشیایی از قوانین نیوتن استفاده می‌شود و ما می‌توانیم به دقت پیش‌بینی کنیم که این اشیاء به کجا می‌روند و تغییر مومنتوم و انرژی جنبشی از یک جسم به جسم دیگر چگونه است. سینماتیک چنین آزمایش‌هایی شامل رسم و تعقیب بردارهای مکان $\vec{x}_A$ ، $\vec{x}_B$ و ... و سرعت هر جسم $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ به صورت تابعی از زمان است (شکل ۴-۲). به افتخار ریاضیدان ایتالیایی جوزن لوئیس لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) هنگامی که از این روش در جریان سیال استفاده می‌شود به آن توصیف لاگرانژی حرکت سیال می‌گویند. تحلیل لاگرانژی مشابه تحلیل سیستمی است که در درس ترمودینامیک آموخته‌اید و در آن جرم ثابتی را دنبال می‌کنیم. همان‌طور که می‌توان تصور کرد این روش تشریح حرکت سیالات، بسیار مشکل‌تر از تعقیب توپ‌های بلیارد است.



شکل ۴-۱ با تعداد اندکی از اشیاء مانند توپ‌های بلیارد روی یک میز، اشیای منفرد را می‌توان ردیابی کرد.



شکل ۲-۴ «توصیف لاگرانژی» موقعیت و سرعت ذرات منفرد

اولاً به راحتی نمی‌توان ذرات متحرک را تعریف و مشخص کرد. ثانیاً سیال یک محیط پیوسته است (از نقطه نظر ماکروسکوپیک) و بنابراین، تقابل میان ذرات همانند تقابل میان اشیاء منفرد از قبیل توپ‌های بلیارد یا توپ‌های حاکی نیست. هم‌چنین، بسته‌های سیال متحرک به طور پیوسته تغییر شکل می‌دهند. از نقطه نظر میکروسکوپیک یک سیال از بلیاردها ملکول تشکیل شده است که تا اندازه‌ای شبیه توپ‌های بلیارد، به طور پیوسته با هم برخورد می‌کنند. ولی حتی با سریع‌ترین و بزرگ‌ترین کامپیوترها، کار دنبال کردن یک گروه از این ملکول‌ها بسیار دشوار است. با این وجود، توصیف لاگرانژی کاربردهای عملی بسیاری از قبیل دنبال کردن اجزای غیر فعال در یک جریان، محاسبات دینامیک گازهای رقیق مرتبط با ورود فضاییماها به اتمسفر زمین و توسعه سیستم‌های اندازه‌گیری جریان مبتنی بر تصویر ذره (همان‌طور که در بخش ۲-۴ بحث می‌شود) دارد.

روش بسیار متداول تشریح جریان سیال، توصیف اویلری حرکت سیال است که به افتخار لئونارد اویلر، ریاضیدان سوئیسی (۱۷۸۳-۱۷۰۷) به این نام شناخته می‌شود. در توصیف اویلری جریان سیال، یک حجم معین که دامنه یا حجم معیار نامیده می‌شود را در نظر می‌گیریم که به این حجم معیار، سیال وارد و یا از آن خارج می‌شود. در این روش نیازی به تعقیب مکان و سرعت ذرات مشخصی از سیال نیست. در عوض، متغیرهای میدانی را به صورت تابعی از مکان و زمان درون حجم معیار تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال، میدان فشار یک متغیر میدانی اسکالر است و برای جریان سیال سه بعدی غیر دائم در مختصات کارتزین به صورت زیر در می‌آید:

$$P = P(x, y, z, t) \quad (۱-۴)$$

به همان صورت میدان سرعت را به صورت متغیر میدانی برداری تعریف می‌کنیم:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \quad (۲-۴)$$

همچنین میدان شتاب نیز به صورت یک متغیر میدان برداری مشابه با میدان سرعت تعریف می شود:

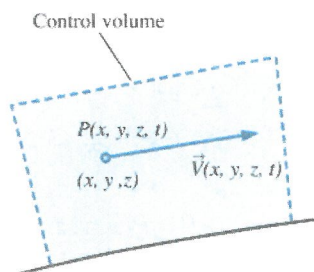
$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t) \quad (۳-۴)$$

در مجموع، این متغیرهای میدانی (و بقیه) میدان جریان را تعریف می کنند. میدان سرعت معادله ۲-۴ را به صورت زیر در مختصات دکارتی (x, y, z) و $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ می توان بسط داد:

$$\vec{V}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k} \quad (۴-۴)$$

بسطهای مشابهی را برای میدان شتاب معادله ۳-۴ می توان به کار برد. در توصیف اویلری همه متغیرهای میدانی در هر موقعیت (x, y, z) درون حجم معیار و در هر زمان t داده شده تعریف می شوند (شکل ۳-۴). در توصیف اویلری دنبال این نیستیم که بر سر ذرات منفرد سیال چه می آید و در عوض به دنبال این هستیم که بدانیم که فشار، سرعت و شتاب هر یک از ذرات سیال در موقعیت و زمان مورد نظر چه میزان می باشند.

تفاوت میان این دو توصیف را با در نظر گرفتن فردی که در کنار رودخانه ای ایستاده و مشغول اندازه گیری خواص آن است، می توان آشکار نمود. از دیدگاه لاگرانژی وی وسیله اندازه گیری را به آب می اندازد که با حرکت آب به پایین دست می رود. در دیدگاه اویلری، او وسیله اندازه گیری را در موقعیت مشخصی درون آب بسته و خواص را می خواند. با وجود این که موارد بسیاری دال بر مفید بودن توصیف لاگرانژی وجود دارد، اما توصیف اویلری برای کاربردهای مکانیک سیالات متداول تر است. علاوه بر این، اندازه گیری های آزمایشگاهی عموماً با توصیف اویلری هماهنگ تر هستند. مثلاً در یک تونل باد معمولاً وسایل اندازه گیری سرعت یا فشار را در مکان ثابتی درون جریان برای اندازه گیری $\vec{V}(x, y, z, t)$ و $P(x, y, z, t)$ نصب می کنند. با این وجود در حالی که معادلات حرکت در توصیف لاگرانژی که ذرات منفرد را دنبال می کنند، شناخته شده هستند (مثل قانون دوم نیوتن)، معادلات حرکت



شکل ۳-۴ در توصیف اویلری، متغیرهای جریان از قبیل میدان فشار، میدان سرعت در هر مکان و هر لحظه از زمان باید تعریف شوند.

سیال در توصیف اویلری واضح نیستند و با دقت باید تعیین شوند.

مثال ۴-۱ میدان سرعت دائم دو بعدی

یک میدان سرعت دائم، تراکم‌ناپذیر و دو بعدی به صورت زیر داده شده است:

$$\vec{V}(u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j} \quad (1)$$

که مختصه‌های x و y بر حسب متر و مقدار سرعت بر حسب m/s است. نقطه سکون را به عنوان نقطه‌ای مادی در میدان جریان که سرعت آن صفر است تعریف می‌کنیم. (الف) تعیین کنید که آیا نقاط سکونی در میدان جریان فوق وجود دارد و اگر این چنین است در کجاست؟

(ب) بردارهای سرعت را برای مکان‌های مختلفی که در قلمرو قرار گرفته بین $x = -2m$ تا $2m$ و $y = 0m$ تا $5m$ رسم کنید. میدان جریان را به طور کیفی تشریح کنید. حل: برای میدان سرعت داده شده، مکان (های) نقطه (های) سکون را باید تعیین کرده و بردارهای سرعت مختلفی باید رسم و میدان سرعت را تشریح کرد. فرضیات: ۱- جریان دائم و تراکم‌ناپذیر است. ۲- جریان دو بعدی است، یعنی سرعت مؤلفه z نداشته و u و v با z تغییر نمی‌کنند.

تحلیل: (الف) چون $\vec{V}$ یک بردار است، برای این که $\vec{V}$ مساوی با صفر شود، تمام مؤلفه‌های آن باید مساوی صفر شوند. با استفاده از معادله ۴-۴ و برابر صفر قرار دادن معادله (۱) به دست می‌آوریم:

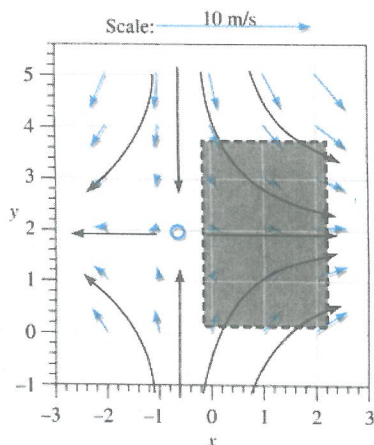
$$u = 0.5 + 0.8x = 0 \rightarrow x = -0.625m$$

$$v = 1.5 - 0.8y = 0 \rightarrow y = 1.875m$$

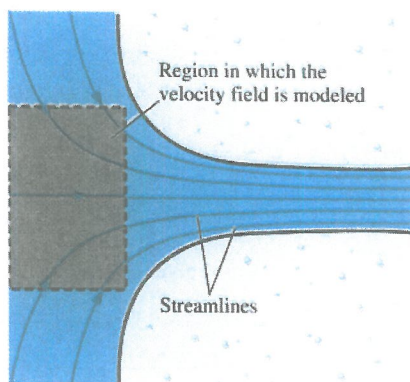
نقطه سکون:

بله. یک نقطه سکون در $x = -0.625m$ و $y = 1.875m$ وجود دارد.

(ب) مؤلفه‌های x و y سرعت با استفاده از معادله (۱) برای چندین موقعیت (x, t) در محدوده مشخص شده محاسبه شده است. مثلاً در نقطه $(x = 2m, y = 3m)$ ، $u = 2.1m/s$ ، $v = -0.9m/s$ می‌باشد. اندازه سرعت در آن نقطه $2.28m/s$ است. در این نقطه و در هر نقطه دیگری، بردارهای سرعت با استفاده از مؤلفه‌های آنها ایجاد می‌شوند که نتایج آن در شکل ۴-۴ نشان داده شده است. جریان را می‌توان به عنوان جریان نقطه سکون در نظر گرفت، که جریان سیال از بالا و پایین وارد شده و حول یک خط افقی متقارن در $y = 1.875m$ به سمت چپ و راست منتشر می‌شود. نقطه سکون قسمت (الف) مسأله با یک دایره در شکل ۴-۴ نشان داده شده است. اگر تنها به قسمت هاشور خورده در شکل ۴-۴ نگاه کنیم، این میدان، جریانی را مدل می‌کند که مبین یک جریان شتاب گیرنده و همگرا شونده از سمت چپ به راست است. به عنوان



شکل ۴-۴ بردارهای سرعت برای میدان سرعت مثال ۴-۱. مقیاس توسط فلش بالای شکل نشان داده شده است و منحنی‌های سیاه بیانگر شکل‌های تقریبی تعدادی از خطوط جریان می‌باشند که براساس بردارهای سرعت محاسبه شده‌اند. نقطه سکون توسط یک دایره نشان داده شده است. ناحیه هاشور خورده بیانگر بخشی از میدان جریان است که می‌تواند جریان تقریبی به سمت یک ورودی باشد (شکل ۴-۵).



شکل ۴-۵ میدان جریان در نزدیکی ورودی زنگوله‌ای شکل یک سد هیدروالکتریک؛ بخشی از میدان سرعت مثال ۴-۱ است که به عنوان یک تخمین مرتبه اول از این میدان جریان فیزیکی ممکن است استفاده شود. ناحیه هاشور خورده با شکل ۴-۴ مرتبط می‌باشد.

مثال، چنین جریانی را به عنوان جریان نزدیک دماغه ورودی زنگوله‌ای شکل یک سد هیدروالکتریک می‌توان تلقی کرد (شکل ۴-۵). قسمت مفید میدان سرعت داده شده را به عنوان تقریب مرتبه اول از قسمت هاشورخورده میدان جریان فیزیکی شکل ۴-۵ می‌توان تلقی کرد.

بحث: با استفاده از مطالب فصل ۹ می‌توان ثابت کرد که این میدان جریان از لحاظ فیزیکی معتبر است، زیرا معادله دیفرانسیل بقای جرم را ارضا می‌کند.

میدان شتاب

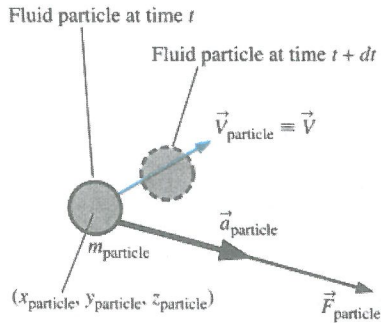
از آموزه‌های ترمودینامیک می‌دانید که قوانین اساسی بقاء (مانند بقای جرم و قانون اول ترمودینامیک) برای یک سیستم با جرم ثابت (که اغلب سیستم بسته نامیده می‌شود) بیان شده‌اند. در حالت‌هایی که تحلیل یک حجم معیار (که اغلب سیستم باز نامیده می‌شود) راحت‌تر از تحلیل سیستم بسته است، لازم است که این قوانین اساسی به اشکال قابل استفاده و برای حجم معیار بازنویسی شوند. در اینجا هم از اصول مشابهی استفاده می‌شود. در واقع، شباهت مستقیمی میان سیستم‌ها در برابر حجم معیارها در ترمودینامیک و توصیف لاگرانژی در برابر اویلری در دینامیک سیالات وجود دارد. معادلات حرکت برای جریان سیال (همچون قانون دوم نیوتن) برای شیء با جرم ثابت، که در اینجا بسته کوچک سیالی در نظر گرفته می‌شود و آن را ذره سیال یا ذره مادی می‌نامیم نوشته می‌شود. اگر ما ذره سیال مشخصی را که در جریان حرکت می‌کند در نظر بگیریم، توصیف لاگرانژی ارائه کرده‌ایم و معادله حرکت به صورت مستقیم قابل اعمال است. مثلاً مکان ذره در فضا را بر حسب یک بردار مادی مکان $(x_{particle}(t), y_{particle}(t), z_{particle}(t))$ تعریف می‌کنیم. باین وجود، برای تبدیل معادلات حرکت به شکل‌هایی که قابل کاربرد برای توصیف اویلری باشند به تغییر برخی روابط نیاز است. به عنوان مثال به بررسی قانون دوم نیوتن برای یک ذره سیال می‌پردازیم:

$$\vec{F}_{particle} = m_{particle} \vec{a}_{particle} \quad (۵-۴)$$

که $\vec{F}_{particle}$ نیروی خالص وارد شده به ذره سیال، $m_{particle}$ جرم ذره و $\vec{a}_{particle}$ شتاب آن می‌باشد (شکل ۴-۶). بر طبق تعریف، شتاب ذره سیال مشتق زمانی سرعت ذره می‌باشد،

$$\vec{a}_{particle} = \frac{d\vec{V}_{particle}}{dt} \quad (۶-۴)$$

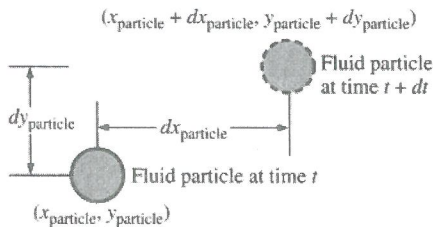
به هر حال، در هر زمان معین t ، سرعت هر ذره سیال در موقعیت $(x_{particle}(t), y_{particle}(t), z_{particle}(t))$ با مقدار موضعی میدان سرعت برابر است. به عبارت دیگر $\vec{V}_{particle}(t) \equiv \vec{V}(x_{particle}(t), y_{particle}(t), z_{particle}(t), t)$ است. پس برای گرفتن مشتق زمانی معادله ۴-۶ چون متغیر وابسته $\vec{V}$ تابعی از چهار متغیر مستقل



شکل ۴-۶ قانون دوم نیوتن که به یک ذره سیال اعمال شده ست، بردار شتاب (بردار خاکستری) در جهتی مشابه با بردار نیرو (بردار سیاه) است، اما بردار سرعت (بردار آبی) ممکن است در یک جهت متفاوت عمل کند.

باید از قاعده زنجیره‌ای استفاده کنیم، پس داریم:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{particle} &= \frac{d\vec{V}_{particle}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}(x_{particle}, y_{particle}, z_{particle}, t)}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_{particle}} \frac{dx_{particle}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y_{particle}} \frac{dy_{particle}}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z_{particle}} \frac{dz_{particle}}{dt}\end{aligned}\quad (۷-۴)$$



شکل ۴-۷ در هنگام تعقیب یک ذره سیال، مؤلفه x سرعت، u ، به صورت $dx_{particle}/dt$ تعریف می‌شود. به طور مشابه $v = dy_{particle}/dt$ و $w = dz_{particle}/dt$ تعریف می‌شوند و برای سادگی در اینجا فقط دو بعد نشان داده شده است.

در معادله ۷-۴، ∂ عملگر مشتق جزئی و d عملگر مشتق کامل می‌باشد. جمله دوم در سمت راست معادله ۷-۴ را در نظر بگیرید. چون شتاب به هنگام تعقیب یک ذره سیال تعریف می‌شود (توصیف لاگرانژی) نرخ تغییر مکان x ذره با زمان $dx_{particle}/dt = u$ می‌باشد (شکل ۷-۴). به طور مشابه $dy_{particle}/dt = v$ و $dz_{particle}/dt = w$ است. به علاوه، در زمان مشخص، بردار مادی مکان $(x_{particle}, y_{particle}, z_{particle})$ ذره سیال در مختصات لاگرانژی با بردار مکان (x, y, z) در مختصات اویلری برابر است. پس معادله ۷-۴ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\vec{a}_{particle}(x, y, z, t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad (۸-۴)$$

که از این واقعیت (مشهود) که $dt/dt = ۱$ است استفاده کرده‌ایم. سرانجام در هر زمان t ، چون بر طبق تعریف، ذره سیال با جریان سیال شتاب می‌گیرد، میدان شتاب معادله ۳-۴ باید با شتاب ذره سیالی که مکان (x, y, z) را در زمان t اشغال کرده است، مساوی باشد. بنابراین برای تبدیل از مختصات لاگرانژی به مختصات اویلری باید $\vec{a}_{particle}$ در معادله ۷-۴ و ۸-۴ را با $\vec{a}(x, y, z, t)$ جایگزین کرد. معادله ۸-۴ به شکل برداری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (۹-۴)$$

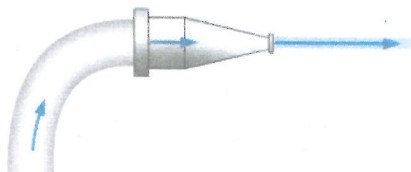
که ∇ عملگر گرادیان یا عملگر دل می‌باشد، که در مختصات کارتزین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۱۰-۴)$$

پس در مختصات کارتزین، مؤلفه‌های بردار شتاب به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (۱۱-۴)$$

جمله اول سمت راست معادله ۹-۴، $\partial \vec{V} / \partial t$ شتاب موضعی نامیده می‌شود که فقط برای جریان‌های غیردائم، غیر صفر است. جمله دوم $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ شتاب جابه‌جایی نامیده می‌شود. این بخش حتی برای جریان‌های دائم نیز می‌تواند غیر صفر باشد. این بخش برای نشان دادن اثر



شکل ۸-۴ جریان عبوری از نازل یک شلنگ باغبانی بیانگر این مطلب است که حتی در یک جریان دائم سیال ممکن است شتاب بگیرند. در این مثال، سرعت خروجی آب بسیار بزرگتر از سرعت آب در شلنگ است و نشان‌دهنده این مطلب است که ذرات سیال حتی هنگامی که جریان دائم است، شتاب گرفته‌اند.

حرکت ذره سیال (جابه‌جایی) به مکان جدیدی در میدان جریان است که دارای میدان سرعت متفاوتی می‌باشد. مثلاً جریان دائم آب از داخل یک آبیاش‌باغ را در نظر بگیرید (شکل ۸-۴). در دستگاه مختصات اویلری جریان دائم را جریانی تعریف می‌کنیم که خواص در هر نقطه از میدان جریان نسبت به زمان تغییر نکند. چون سرعت سیال در خروجی نازل بزرگتر از سرعت سیال در ورودی آن است، حتی در جریانی که دائم هم باشد، ذرات سیال آشکارا شتاب می‌گیرند. به علت وجود جمله شتاب جابه‌جایی در معادله ۹-۴، شتاب ذره غیر صفر است. گفتنی است که با این که از دید یک ناظر ساکن در دستگاه مختصات اویلری جریان دائم است اما از دید دستگاه مختصات لاگرانژی که با ذره سیال حرکت کرده و به نازل وارد شده جریان شتاب گرفته و دائم نمی‌باشد.

مثال ۲-۴ شتاب ذره سیال عبوری از یک شیپوره همگرا

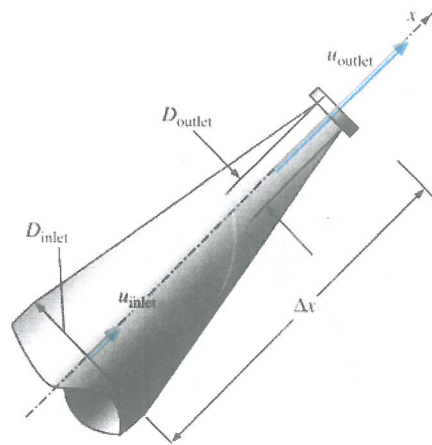
نادین در حال شستشوی ماشین خود با استفاده از نازلی است که مشابه آن در شکل ۸-۴ نشان داده شده است. طول نازل $3/90\text{ in}$ ($0/325\text{ ft}$)، قطر داخلی آن $0/42\text{ in}$ ($0/035\text{ ft}$) و قطر خارجی آن $0/182\text{ in}$ می‌باشد (شکل ۹-۴ را ببینید). دبی حجمی عبوری از آبیاش‌باغچه (عبوری از نازل) $\dot{V} = 0/841\text{ gal/min}$ ($0/00187\text{ ft}^3/\text{s}$) بوده و جریان دائم است. شتاب سیال عبوری از خط مرکزی نازل را به دست آورید.

حل: شتاب هر ذره سیال عبوری از خط مرکزی نازل را باید تخمین زد.

فرضیات: ۱- جریان دائم و تراکم‌ناپذیر است. ۲- محور x در امتداد خط مرکزی نازل است.

۳- به علت تقارن در امتداد خط مرکزی $v=w=0$ است، اما u در طول نازل افزایش می‌یابد.

تحلیل: جریان دائم است. بنابراین به نظر می‌رسد که شتاب صفر در نظر گرفته شود. به هر حال با وجود این که شتاب موضعی $\partial \vec{V} / \partial t$ برای این میدان جریان دائم صفر است، شتاب



شکل ۹-۴ جریان آب عبوری از نازل مثال ۲-۴.

جابه‌جایی $(\vec{V} \cdot \vec{V})\vec{V}$ صفر نیست. ابتدا میانگین مؤلفه x سرعت در ورودی و خروجی نازل را از تقسیم دبی حجمی بر سطح مقطع نازل به دست می‌آوریم:

$$u_{inlet} \cong \frac{\dot{V}}{A_{inlet}} = \frac{4\dot{V}}{\pi D_{inlet}^2} = \frac{4(0.00187 \text{ ft}^3/\text{s})}{\pi(0.0350 \text{ ft})^2} = 1.95 \text{ ft/s}$$

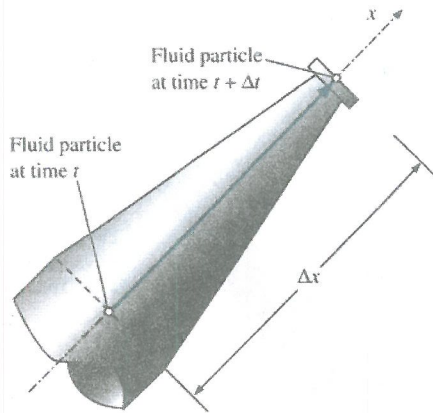
به همین ترتیب، سرعت متوسط خروجی $u_{outlet} = 10/4 \text{ ft/s}$ است. اینک شتاب را با دو روش، که نتایج یکسانی دارند محاسبه می‌کنیم. ابتدا مقدار متوسط شتاب در جهت x را از تقسیم میزان تغییر سرعت بر زمانی که یک ذره درون نازل قرار می‌گیرد، (یعنی $\Delta t = \Delta x / u_{avg}$) حساب می‌کنیم (شکل ۹-۴). بر اساس تعریف پایه‌ای شتاب به عنوان نرخ تغییر سرعت، داریم،

$$a_x \cong \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_{outlet} - u_{inlet}}{\Delta x / u_{avg}} = \frac{u_{outlet} - u_{inlet}}{2\Delta x / (u_{outlet} + u_{inlet})} = \frac{u_{outlet}^2 - u_{inlet}^2}{2\Delta x} \quad \text{روش الف:}$$

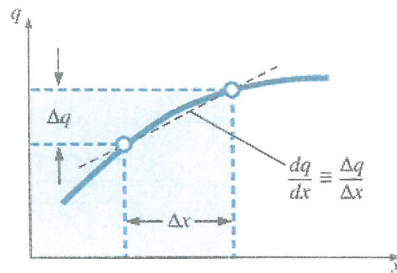
روش دوم از معادله مؤلفه‌های میدان شتاب در مختصات کارتزین، معادله ۴-۱۱، استفاده

می‌کند،

$$a_x = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{دائم}} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{در امتداد خط مرکز}} + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{در امتداد خط مرکز}} \cong u_{avg} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{روش ب:}$$



شکل ۴-۱۰ زمان اقامت Δt به صورت زمان مورد نیاز برای حرکت ذره سیال از ورودی نازل تا خروجی آن تعریف می‌شود (فاصله Δt).



شکل ۴-۱۱ یک تخمین اختلاف محدود مرتبه اول برای مشتق dq/dx تغییر در متغیر وابسته (q) تقسیم بر تغییر در متغیر مستقل (x) است.

که در اینجا می‌بینیم تنها یک جمله جابه‌جایی غیر صفر است. متوسط سرعت عبوری از نازل را به صورت متوسط سرعت‌های ورودی و خروجی تخمین می‌زنیم و برای مقدار متوسط مشتق $\partial u / \partial x$ مربوط به خط مرکزی نازل از یک تخمین اختلاف محدود مرتبه اول استفاده می‌کنیم (شکل ۴-۱۱):

$$a_x \cong \frac{u_{outlet} + u_{inlet}}{2} \frac{u_{outlet} - u_{inlet}}{\Delta x} = \frac{u_{outlet}^2 - u_{inlet}^2}{2 \Delta x}$$

نتیجه روش (ب) با روش (الف) یکسان است. با جایگزینی مقادیر داده شده به دست می‌آوریم:

$$a_x = \frac{u_{outlet}^2 - u_{inlet}^2}{2 \Delta x} = \frac{(10.4 \text{ ft/s})^2 - (1.95 \text{ ft/s})^2}{2(0.325 \text{ ft})} = 160 \text{ ft/s}^2$$

بحث: شتاب ذرات سیال عبوری از نازل تقریباً پنج برابر شتاب گرانش (تقریباً پنج g) است. این مثال ساده به وضوح نشان می‌دهد که شتاب یک ذره سیال حتی در یک جریان دائم می‌تواند غیر صفر باشد. گفتنی است که شتاب در عمل یک تابع نقطه‌ای است، در حالی که ما متوسط شتاب در کل نازل را تخمین زدیم.

مشتق مادی

به عملگر مشتق کلی d/dt در معادله ۹-۴ نام خاصی به نام مشتق مادی داده می‌شود. هم‌چنین برخی نویسندگان برای تأکید بر این که این مشتق مرتبط با ذره سیالی است که در یک میدان جریان حرکت می‌کند، از نماد مخصوص D/Dt استفاده می‌کنند (شکل ۱۲-۴). نام‌های دیگر این مشتق تحت عنوان مشتق کلی، ذره‌ای، لاگرانژی، اویلری و مادی می‌باشند.

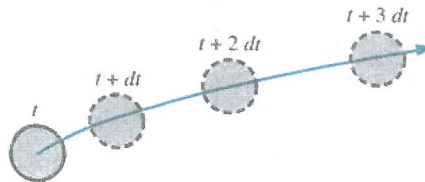
$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \quad (۱۲-۴)$$

هنگامی که مشتق مادی معادله ۱۲-۴ را برای میدان سرعت به کار می‌بریم، نتیجه میدان شتاب است که به وسیله معادله ۹-۴ بیان می‌شود و بنابراین بعضی اوقات شتاب مادی نامیده می‌شود:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \quad (۱۳-۴)$$

هم‌چنین معادله ۱۲-۴ را به جای سرعت برای خواص دیگر سیال که اسکالر یا برداری هستند می‌توان به کار برد. برای مثال، مشتق مادی فشار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)P \quad (۱۴-۴)$$



شکل ۱۲-۴ مشتق مادی D/Dt با تعقیب ذره سیال در حین حرکت در میدان جریان تعریف می‌شود. در این توصیف، هنگامی که ذره سیال به بالا و راست حرکت می‌کند در حال شتاب‌گیری می‌باشد.

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}}_{\text{Material derivative}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{Local}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla)}_{\text{Advective}}$$

شکل ۴-۱۳ مشتق مادی D/Dt از یک بخش موضعی یا غیردائم و یک بخش جابه‌جایی یا ادوکتیو تشکیل شده است.

معادله ۴-۱۴ نشان‌دهنده نرخ زمانی تغییر فشار مرتبط با یک ذره سیال متحرک است و این معادله در برگیرنده مؤلفه‌های موضعی (غیر دائم) و جابه‌جایی می‌باشد (شکل ۴-۱۳).

مثال ۴-۳ شتاب مادی یک میدان سرعت دائم

میدان سرعت دائم، تراکم‌ناپذیر و دو بعدی مثال ۴-۱ را در نظر بگیرید. (الف) شتاب مادی در نقطه $(x=2m, y=3m)$ را محاسبه کنید. (ب) همانند مثال ۴-۱ بردارهای شتاب مادی در آرایه‌های یکسان مقادیر x و y را رسم کنید.

حل: برای میدان سرعت داده شده، بردار شتاب مادی در یک نقطه خاص باید محاسبه شده و در یک آرایه مکانی در میدان جریان رسم شود.

فرضیات: ۱- جریان دائم و تراکم‌ناپذیر است. ۲- جریان دو بعدی است، که بیان‌کننده این است که سرعت در راستای z مؤلفه‌ای ندارد و u و v نیز با z تغییر نمی‌کنند.

تحلیل: (الف) با استفاده از میدان سرعت معادله ۱ در مثال ۴-۱ و معادله مربوط به مؤلفه‌های شتاب مادی در مختصات دکارتی (معادله ۴-۱۱)، دو مؤلفه غیر صفر بردار شتاب را به صورت

زیر می‌نویسیم:

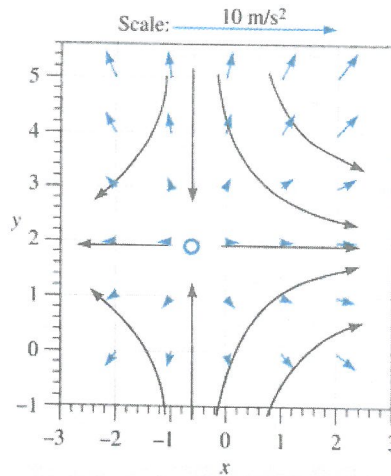
$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= 0 + (\underbrace{0.5 + 0.8x}_{0.8})(0.8) + (\underbrace{1.5 + 0.8y}_{0}) + 0 = (0.4 + 0.64x)m/s^2$$

و

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$= 0 + (\underbrace{0.5 + 0.8x}_{0.8})(0) + (\underbrace{1.5 - 0.8y}_{-0.8})(-0.8) + 0 = (-1.2 + 0.64y)m/s^2$$

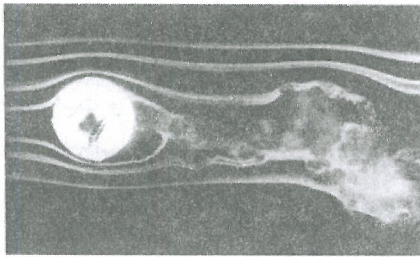


شکل ۴-۱۴ بردارهای شتاب برای میدان سرعت مثال‌های ۴-۱ و ۴-۳. مقیاس به وسیله بردار بالایی نشان داده شده است و منحنی‌های سیاه بیانگر شکل‌های تخمینی تعدادی از خطوط جریان محاسبه شده براساس بردارهای سرعت هستند. (شکل ۴-۴ را ببینید). نقطه سکون توسط یک دایره مشخص شده است.

در نقطه $(x=2m, y=3m)$ ، $a_x = 1/68 m/s^2$ و $a_y = 0/720 m/s^2$ است. (ب) معادلات قسمت الف به یک آرایه از مقادیر x و y در قلمرو جریان با محدودیت‌های مربوطه اعمال شده و بردارهای شتاب حاصل در شکل ۴-۱۴ رسم شده‌اند. بحث: با این که جریان دائم است، میدان شتاب غیر صفر می‌باشد. در بالای نقطه سکون (بالای $y=1/875m$) بردارهای شتاب که در شکل ۴-۱۴ رسم شده‌اند رو به بالا هستند که نشان می‌دهد که در این قسمت با دور شدن از نقطه سکون مقدار شتاب افزایش می‌یابد. در سمت راست نقطه سکون (سمت راست $x=-0/625m$) بردارهای شتاب به سمت راست هستند که نشان‌دهنده افزایش مقدار شتاب از نقطه سکون است. این مورد به طور کیفی با بردارهای سرعت شکل ۴-۴ و خطوط جریان رسم شده در شکل ۴-۱۴ مطابقت دارد. در قسمت بالایی سمت راست میدان جریان، ذرات سیال در جهت راست و به سمت بالا شتاب می‌گیرند و بنابراین به علت شتاب گریز از مرکز در خلاف جهت عقربه‌های ساعت هستند. جریان در زیر خط $y=1/875m$ تصویر آینه‌ای از جریان بالای آن حول خط تقارن است و جریان در سمت چپ خط $x=-0/625m$ تصویر آینه‌ای از جریان سمت راست این خط تقارن است.

۴-۲ اصول مشاهده جریان

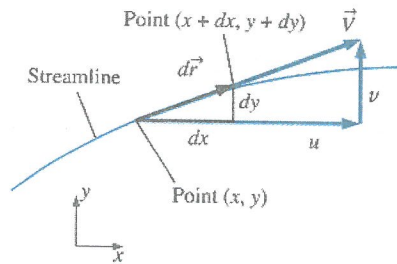
چون بررسی کمی دینامیک سیالات به ریاضیات پیشرفته‌ای نیاز دارد، از مشاهده جریان چیزهای بیشتری را می‌توان آموخت. مشاهده جریان نه تنها در آزمایش‌های فیزیکی (شکل ۴-۱۵) بلکه در روش‌های عددی (دینامیک سیال محاسباتی *CFD*) نیز مفید است. در واقع اولین کار بسیار مهمی که یک مهندس بعد از استفاده از *CFD* و به دست آوردن حل عددی انجام می‌دهد شبیه‌سازی بعضی از روش‌های مشاهده جریان است تا او بتواند به جای یک فهرست از اعداد یا اطلاعات کمی، یک تصویر کلی از جریان را مشاهده کند. چرا؟ زیرا ذهن فرد به صورتی است که قادر است به سرعت مقدار غیر قابل باوری از اطلاعات تصویری را پردازش کند. یعنی به قول عموم، یک تصویر از هزاران کلمه با ارزش‌تر است. الگوهای جریان بسیاری وجود دارند که هم به طریقه فیزیکی (آزمایشگاهی) و یا محاسباتی می‌توان آنها را مشاهده کرد.



شکل ۴-۱۵ توپ بیسبال چرخان. اف.ان. پروان، سالیان درازی را برای استفاده از دود برای مشاهده جریان در تونل باد در دانشگاه نوتردام صرف کرد. اینجا سرعت جریان در حدود 77 ft/s است و توپ با سرعت 630 rpm در حال چرخش است.

خطوط جریان و لوله جریان

یک خط جریان، منحنی است که بردار سرعت لحظه‌ای در هر مکانی بر آن مماس می‌باشد. خطوط جریان شاخص‌های مهمی برای تعیین جهت لحظه‌ای حرکت سیال در میدان جریان هستند. مثلاً، نواحی جریان چرخشی و جدایی سیال از روی دیواره‌های صلب به کمک الگوی خط جریان قابل شناسایی هستند. به جز در میدان‌های جریان دائم، خطوط جریان را به صورت آزمایشگاهی نمی‌توان مشاهده کرد، زیرا در جریان دائم این خطوط با خطوط مسیر و خطوط اثر، که بعداً تشریح می‌شوند، بر هم منطبق هستند. به هر حال از نظر ریاضی و بر اساس تعریف می‌توان عبارت ساده‌ای برای خط جریان نوشت. طول جزیی قوسی $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ را در امتداد یک خط جریان در نظر بگیرید، با توجه به تعریف خط جریان، $d\vec{r}$ باید با بردار سرعت موضعی $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ موازی باشد. می‌دانیم که با یک استدلال هندسی ساده و



شکل ۴-۱۶ برای جریان دو بعدی در صفحه xy ، طول قوس $d\vec{r} = (dx \ dy)$ در امتداد یک خط جریان در هر مکانی بر بردار سرعت لحظه‌ای موضعی $\vec{V}(u, v)$ مماس است.

با استفاده از مثلث‌های متشابه مؤلفه‌های $d\vec{r}$ باید با مؤلفه‌های $\vec{V}$ متناسب باشند (شکل ۴-۱۶). بنابراین،

$$\frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (۴-۱۵)$$

که dr اندازه بردار $d\vec{r}$ بوده و V هم مقدار سرعت است که اندازه بردار $\vec{V}$ می‌باشد. برای سادگی معادله ۴-۱۵ در دو بعد و در شکل ۴-۱۶ نشان داده شده است. برای یک میدان سرعت مشخص با انتگرال‌گیری از معادله ۴-۱۵ می‌توان معادلاتی برای خطوط جریان به دست آورد. در دو بعد، (u, v) ، (x, y) معادله دیفرانسیل مربوطه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{در امتداد یک خط جریان}} = \frac{v}{u} \quad (۴-۱۶)$$

در بعضی حالات ساده، معادله ۴-۱۶ را به صورت تحلیلی می‌توان حل کرد، اما در حالت کلی معادله به صورت عددی حل می‌شود. در هر حالت یک ثابت دلخواه انتگرال‌گیری ظاهر می‌شود و خانواده منحنی‌هایی که معادله ۴-۱۶ را ارضا می‌کنند، نشان دهنده خطوط جریان مرتبط با میدان هستند.

مثال ۴-۴ خطوط جریان در صفحه xy : یک حل تحلیلی

برای میدان سرعت دائم، تراکم‌ناپذیر و دو بعدی مثال ۴-۱، تعدادی از خطوط جریان را در نیمه سمت راست جریان ($x > 0$) رسم کنید و با بردارهای سرعت رسم شده در شکل ۴-۴ مقایسه کنید.

حل: عبارتی تحلیلی برای خطوط جریان به دست آمده و خطوط جریان را باید در گوشه بالایی سمت راست رسم کرد.

فرضیات: ۱- جریان دائم و تراکم‌ناپذیر است. ۲- جریان دو بعدی است و از مؤلفه z سرعت صرف نظر شده است و هم‌چنین از تغییرات u و v با z نیز صرف‌نظر شده است. تحلیل: معادله ۴-۱۶ را در اینجا به کار می‌بریم. بنابراین، در طول یک خط جریان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1.5 - 0.18y}{0.5 + 0.18x}$$

این معادله دیفرانسیل را با جداسازی متغیرها حل می‌کنیم:

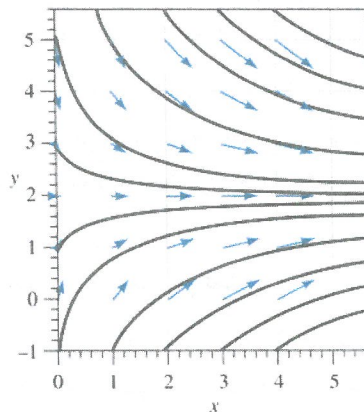
$$\frac{dy}{1.5 - 0.18y} = \frac{dx}{0.5 + 0.18x} \rightarrow \int \frac{dy}{1.5 - 0.18y} = \int \frac{dx}{0.5 + 0.18x}$$

بعد از پاره‌ای عملیات جبری (که انجام آنها را به عهده خوانندگان می‌گذاریم)، در طول یک خط جریان y را به صورت تابعی از x به دست می‌آوریم:

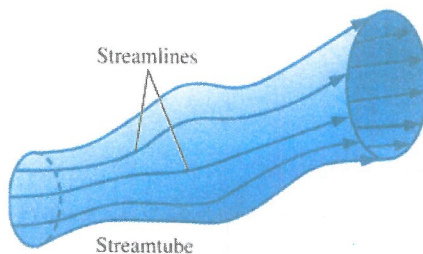
$$y = \frac{C}{0.18(0.5 + 0.18x)} + 1.875$$

که C ثابت انتگرال‌گیری است و برای رسم خطوط جریان، مقادیر مختلفی را می‌توان به آن متناسب کرد. تعدادی از خطوط جریان برای میدان جریان داده شده در شکل ۴-۱۷ رسم شده‌اند.

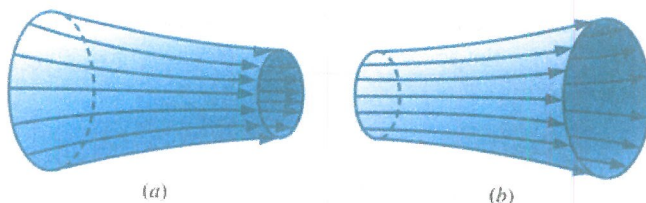
بحث: بردارهای سرعت شکل ۴-۴ روی خطوط جریان شکل ۴-۱۷ اضافه شده‌اند و چون بردارهای سرعت در هر نقطه بر خطوط جریان مماس هستند تطابق بسیار خوبی وجود دارد. گفتنی است که تنها از طریق خطوط جریان سرعت را نمی‌توان به دست آورد.



شکل ۴-۱۷ خطوط جریان (منحنی‌های سیاه) برای میدان سرعت مثال ۴-۴، بردارهای سرعت مثال ۴-۴ (آرایه‌های آبی) برای مقایسه اضافه شده‌اند.



شکل ۴-۱۸ یک لوله جریان شامل دسته‌ای از خطوط جریان منفرد می‌باشد.

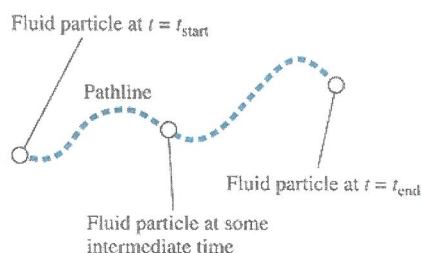


شکل ۴-۱۹ در میدان جریان تراکم‌ناپذیر یک لوله جریان (الف) هنگامی که جریان شتاب می‌گیرد و یا همگرا می‌شود قطر کم می‌شود و (ب) هنگامی که جریان شتاب کند شونده دارد و یا واگرا می‌شود قطر زیاد می‌شود.

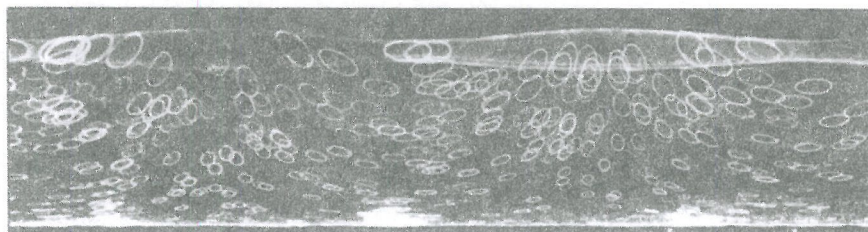
یک لوله جریان شامل مجموعه‌ای از خطوط جریان است (شکل ۴-۱۸). درست شبیه یک کابل ارتباطات که شامل یک مجموعه‌ای از کابل‌های فیبرنوری است. چون خطوط جریان در هر مکان با سرعت موضعی موازی می‌باشند، طبق تعریف، سیال یک خط جریان را قطع نمی‌کند. به همین ترتیب، سیال در داخل یک لوله جریان باقی مانده و مرز لوله را قطع نمی‌کند. گفتنی است که هم خطوط جریان و هم لوله‌های جریان کمیت‌های لحظه‌ای هستند و در یک لحظه خاص و مطابق با میدان سرعت در آن لحظه خاص تعریف می‌شوند. در یک جریان غیر دائم، الگوی خط جریان، به طور چشمگیری با زمان تغییر می‌کند. با این وجود، در یک لحظه از زمان، دبی جرمی عبوری از هر برش سطح مقطع لوله جریان باید یکسان بماند. مثلاً در قسمت همگرای یک میدان جریان تراکم‌ناپذیر، چون جرم ثابت می‌ماند، سرعت افزایش یافته و قطر لوله جریان کاهش می‌یابد (شکل ۴-۱۹ الف). به طریق مشابه در قسمت واگرای یک جریان تراکم‌ناپذیر، قطر لوله جریان افزایش می‌یابد (شکل ۴-۱۹ ب).

خطوط مسیر

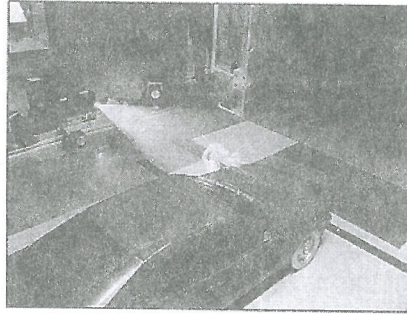
خط مسیر، مسیر واقعی پیموده شده توسط یک ذره سیال منفرد در طی چندین دوره زمانی می باشد. خطوط مسیر ساده ترین الگوهای قابل درک جریان هستند. خط مسیر یک مفهوم لاگرانژی است، به صورتی که هنگامی که یک ذره منفرد سیال در میدان جریان در حرکت است، آن را صرفاً دنبال می کنیم (شکل ۴-۲۰). و بنابراین یک خط مسیر شبیه بردار مکان مادی $(x_{particle}(t), y_{particle}(t), z_{particle}(t))$ است که در بخش ۴-۱ بحث شد و مسیرگذار در بازه زمانی مشخصی صورت می گیرد. با انجام یک آزمایش فیزیکی ذرات معینی از سیال را می توان با رنگ یا نور از ذرات مجاور متمایز نمود. اینک دوربینی را در نظر بگیرید که دریچه آن برای مدت زمان معینی، $t_{start} < t < t_{end}$ باز بوده و مسیر ذرات را عکس برداری نماید. منحنی حاصل را خط مسیر می گویند. مثال زیبایی در شکل ۴-۲۱ نشان داده شده که در آن امواج در طول سطح آب یک مخزن در حال حرکت هستند. ذرات ردیاب سفید رنگ شناور در آب معلق هستند و برای یک دوره تناوب کامل موج، تصویر توسط دوربین



شکل ۴-۲۰ یک خط مسیر با تعقیب مسیر واقعی یک ذره سیال تشکیل می شود.



شکل ۴-۲۱ خطوط مسیر توسط ذرات ردیاب سفید معلق در آب و عکس برداری توسط یک دوربین ایجاد می شوند. هنگامی که امواج به صورت افقی حرکت می کنند، هر ذره در یک دوره تناوب موج در یک مسیر بیضوی حرکت می کند.



شکل ۴-۲۲ PIV برای مدل کردن اتومبیل در یک تونل باد به کار برده می‌شود.

عکاسی گرفته شده است. نتیجه حاصل خطوط مسیر هستند که به شکل بیضوی بوده و این خطوط نشان دهنده این هستند که ذرات سیال به بالا و پایین و جلو و عقب می‌روند، اما پس از خاتمه یک دوره تناوب به مکان اولیه خود بر می‌گردند و حرکت خالص رو به جلویی ندارند. شما ممکن است که مسأله مشابهی را به هنگام بالا و پایین رفتن روی امواج اقیانوس تجربه کرده باشید.

یک روش مدرن آزمایشگاهی که از خطوط مسیر برای اندازه‌گیری میدان سرعت در جریان (آدریان ۱۹۹۹) استفاده می‌کند، روش اندازه‌گیری سرعت ذره (PIV) می‌باشد (با پیشرفت‌های اخیر، روش به سه بعد گسترش یافته است). در روش PIV مشابه با شکل ۴-۲۱ ذرات ردیاب کوچکی در سیال رها می‌شوند، سپس به کمک دو منبع نوری جریان روشن می‌شود (معمولاً به کمک لیزر، همان‌گونه که در شکل ۴-۲۲ آمده است) تا از حرکت ذرات متحرک دو تصویر بر روی فیلم حساسی تهیه شود. در نتیجه هم مقدار و هم جهت بردارهای سرعت ذرات را با فرض این‌که ذرات ردیاب به اندازه کافی کوچک بوده و با سیال حرکت می‌کنند، می‌توان حدس زد. تصویر برداری دیجیتال پیشرفته و استفاده از کامپیوترهای سریع، روش PIV را به عنوان روشی کارا و با سرعت بالا تبدیل کرده است، به طوری که حتی الگوهای غیر دائم میدان جریان را نیز می‌توان اندازه گرفت. PIV با جزئیات بیشتر در فصل ۸ توضیح داده شده است.

برای یک میدان سرعت مشخص، خطوط مسیر را به صورت عددی هم می‌توان محاسبه کرد. برای این کار، مکان یک ذره ردیاب نسبت به زمان از مکان شروع $\vec{x}_{start}$ و زمان شروع t_{start} تا زمان t انتگرال‌گیری می‌شود.

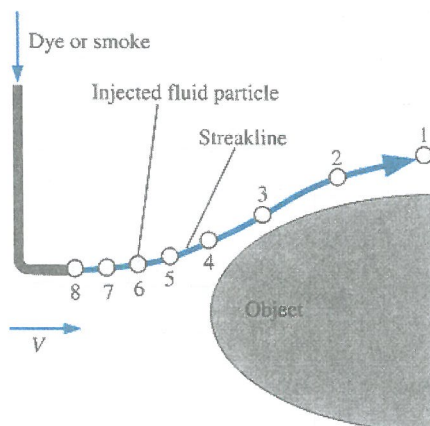
$$\vec{x} = \vec{x}_{start} + \int_{t_{start}}^t \vec{V} dt \quad (۱۷-۴)$$

هنگامی که معادله ۴-۱۷ در فاصله زمانی t که در بین t_{start} و t_{end} قرار گرفته است، محاسبه شد، رسم $\vec{x}(t)$ مطابق شکل ۴-۲۰ خط مسیر را برای یک ذره سیال در طی این بازه زمانی

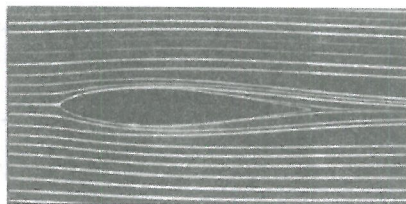
می‌دهد. برای میدان‌های جریان ساده می‌توان از معادله ۴-۱۷ به صورت تحلیلی انتگرال‌گیری کرد. برای جریان‌های بسیار پیچیده، انتگرال‌گیری را باید به صورت عددی انجام داد. اگر میدان سرعت دائم باشد، ذرات منفرد سیال، خطوط جریان را دنبال می‌کنند. پس برای جریان دائم، خطوط مسیر مشابه با خطوط جریان هستند.

خطوط اثر

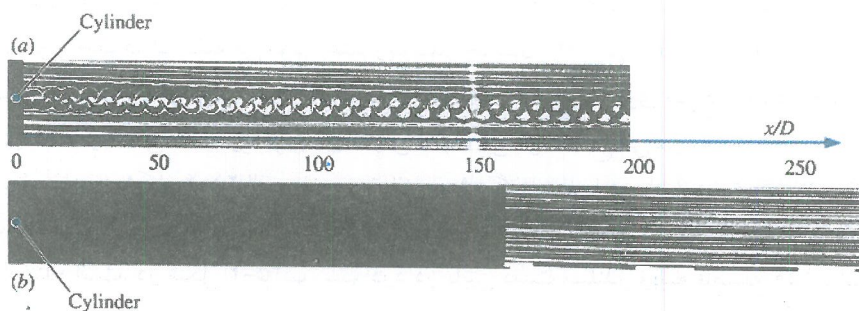
خط اثر مکان هندسی ذرات سیالی است که به صورت متوالی از یک نقطه مشخص رد شده‌اند. خطوط اثر متداول‌ترین خطوطی هستند که در یک آزمایش فیزیکی ایجاد می‌شوند. اگر لوله کوچکی را در جریانی قرار دهید و از طریق این لوله به طور پیوسته ذرات ردیاب (رنگ در جریان آب یا دود در جریان هوا) را به جریان اضافه کنید، خطوط حاصل را خطوط اثر می‌نامند. شکل ۴-۲۳ ردیابی را نشان می‌دهد که در آن به جریان آزاد حول یک جسم مانند یک دماغه یا بال، رنگ یا دود تزریق شده است. دایره‌ها نشان دهنده ذرات مجزای سیال ردیاب هستند که در یک بازه زمانی یکنواخت به جریان تزریق شده‌اند. چون ذرات سیال بر اثر حضور جسم از مسیر خود منحرف می‌شوند، این ذرات در اطراف جسم شتاب گرفته و در نتیجه فاصله بین آنها زیاد می‌شود. خط اثر از وصل تمام دایره‌ها با یک منحنی هموار حاصل می‌شود. در آزمایش‌های فیزیکی در تونل باد یا آب، دود یا رنگ به صورت پیوسته و نه به صورت ذرات مجزا تزریق می‌شود و الگوی جریان حاصل منطبق با تعریف خط اثر است. در شکل ۴-۲۳ ذره ردیاب ۱ نسبت به ذره ۲ و مابقی



شکل ۴-۲۳ یک خط اثر با تزریق پیوسته رنگ یا دود از یک نقطه در جریان تشکیل می‌شود. ذرات ردیاب مشخص شده (۱ تا ۸) به صورت متوالی تزریق می‌شوند.



شکل ۴-۲۴ خطوط اثر توسط سیال رنگی تزریق شده در بالادست به وجود می آیند. چون جریان دائم است، این خطوط اثر مشابه با خطوط جریان و خطوط مسیر هستند.



شکل ۴-۲۵ خطوط اثر به وجود آمده توسط یک سیم دود در دو ناحیه مختلف در دنباله یک سیلندر دایروی، (الف) سیم دود درست پایین دست سیلندر است و (ب) سیم دود در $x/D = 150$ واقع شده است با مقایسه این دو تصویر، طبیعت وابسته به زمان خطوط اثر به وضوح دیده می شوند.

ذرات زودتر رها می شود. موقعیت یک ذره ردیاب توسط میدان سرعت اطراف آن از لحظه تزریق در جریان تا زمان حال تعیین می شود. اگر میدان جریان غیر دائم باشد میدان سرعت متغیر بوده و خط اثر حاصل با خطوط جریان و مسیر یکسان نخواهد بود. در هر حال، اگر جریان دائم باشد، خطوط جریان، مسیر و اثر یکی می شوند (شکل ۴-۲۴).
اغلب، خطوط اثر با خطوط جریان یا خطوط مسیر اشتباه می شوند. در حالی که هر سه خط در جریان دائم یکی هستند. در جریان غیر دائم آنها کاملاً متفاوت هستند. تفاوت اصلی در این است که در هر زمان معین، خط جریان نشان دهنده الگوی لحظه‌ای جریان است، در حالی که خط اثر و خط مسیر الگوهایی هستند که دارای سابقه بوده و بنابراین دارای یک تاریخچه زمانی هستند. خط اثر یک تصویر لحظه‌ای از الگوی جریان مجتمع - زمانی است، از طرف دیگر، خط مسیر، مسیر جریان یک ذره مجزاست که در یک فاصله زمانی طی شده است.

خاصیت تجمع زمانی خطوط اثر در آزمایشی که توسط سیمبالا و همکاران (۱۹۸۸) ارائه شده، در شکل ۴-۲۵ آورده شده است. نویسندگان از یک سیم دود برای مشاهده جریان در یک تونل باد استفاده کرده‌اند. سیم دود یک سیم عمودی نازک است که با روغن معدنی پوشانده شده است. روغن بر اثر کشش سطحی، در امتداد طول سیم به صورت دانه دانه جدا می‌شود. با عبور جریان الکتریکی از سیم و گرم شدن آن، دانه‌های کوچک روغن یک خط اثر از دود را نشان می‌دهند. در شکل ۴-۲۵ الف خطوط اثر ناشی از یک سیم دود که در پایین دست سیلندر استوانه‌ای به قطر D که به صورت عمود بر صفحه کاغذ قرار گرفته، نشان داده شده است (هنگامی که تعداد زیادی خط اثر در امتداد یک خط ایجاد شود، مشابه شکل ۴-۲۵، به آنها نوار خطوط اثر گفته می‌شود). عدد رینولدز جریان $Re = \rho V D / \mu = 93$ است. به علت ریزش گردابه‌های غیر دائم از سیلندر، که در الگوی متفاوتی روی می‌دهند، دودها در الگوی کاملاً واضحی که مسیر گردابه‌ای کارمن نامیده می‌شود تجمع می‌نمایند.

با استفاده از شکل ۴-۲۵ الف، فرد می‌تواند ریزش گردابه‌ها را در پایین دست سیلندر، تا چند صد برابر قطر سیلندر، انتظار داشته باشد. به هر حال، الگوی جریان، در این شکل گمراه‌کننده است. در شکل ۴-۲۵ ب، سیم دود در پایین دست سیلندر و به فاصله 150° برابر قطر سیلندر قرار داده شده است. خطوط اثر حاصل به صورت مستقیم بوده و نشان دهنده این امر هستند که ریزش گردابه‌ها در این فاصله ناپدید شده‌اند. در این مکان، جریان دائم و موازی است و گردابه‌ای وجود ندارد و در حول و حوش 100° برابر قطر سیلندر، دیفیوژن لزجت سبب ایجاد گردابه‌هایی می‌شود که غیر هم جهت بوده و یکدیگر را خنثی می‌کنند. الگوی شکل ۴-۲۵ الف در موقعیت $x/D = 150^\circ$ نشان‌دهنده گردابه‌های تولیدی در بالادست هستند. به هر حال، خطوط اثر شکل ۴-۲۵ ب تصویر صحیحی از جریان در آن نقطه را نشان می‌دهند. خطوط اثر ایجاد شده در $x/D = 150^\circ$ با خطوط جریان یا خطوط مسیر در آن ناحیه یکی هستند، زیرا در آنجا جریان دائم است. این خطوط تقریباً افقی و مستقیم هستند.

در یک میدان جریان تشخیص خطوط اثر را به روش عددی هم می‌توان انجام داد. البته انجام این کار، دشواری‌هایی نیز در بر دارد. فرد باید مسیر پیوسته حرکت ذرات ردیاب را از زمان تزریق آنها تا زمان حاضر با استفاده از معادله ۴-۱۷ دنبال کند. از نقطه نظر ریاضی، مکان ردیاب نسبت به زمان، از زمان تزریق آن t_{inject} تا زمان حال $t_{present}$ انتگرال‌گیری می‌شود. معادله ۴-۱۷ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\vec{x} = \vec{x}_{injection} + \int_{t_{inject}}^{t_{present}} \vec{V} dt \quad (4-18)$$

در یک جریان غیر دائم پیچیده، بر اثر تغییر میدان سرعت با زمان، انتگرال‌گیری نسبت به زمان باید به صورت عددی انجام شود. با وصل کردن مکان هندسی مکان‌های ردیاب در $t = t_{present}$ توسط یک منحنی هموار، نتیجه حاصل خط اثر را می‌دهد.

مثال ۴-۵ مقایسه الگوهای جریان در یک جریان غیر دائم

میدان سرعت یک جریان غیر دائم، تراکم‌ناپذیر و دو بعدی به صورت زیر داده شده است:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 + 2.5 \sin(\omega t) - 0.8y)\vec{j} \quad (1)$$

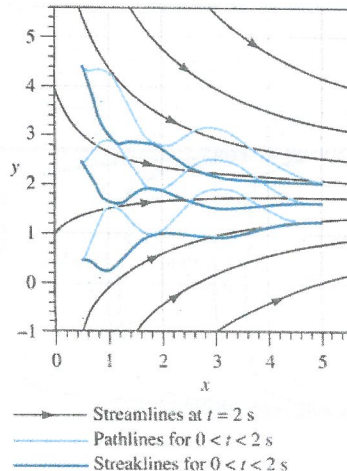
که سرعت زاویه‌ای ω برابر با $2\pi \text{ rad/s}$ (فرکانس فیزیکی 1 Hz) است.

به جز جمله پریودیک اضافه شده به مؤلفه v سرعت، میدان سرعت حاصل مشابه با معادله ۱ در مثال ۴-۱ است. در واقع چون دوره تناوب نوسان 1 s است زمان t مضربی از $1/2 \text{ s}$ ($t = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots, 5$) بوده و جمله سینوس $\sin$ در معادله (۱) برابر با صفر شده و میدان سرعت با مثال ۴-۱ یکی می‌شود. از نقطه نظر فیزیکی، جریان را به صورت جریانی در دهانه ورودی یک زنگوله بزرگ فرض می‌کنیم که با فرکانس 1 Hz به سمت بالا و پایین در نوسان است. دو سیکل کامل جریان را از زمان $t = 0 \text{ s}$ تا $t = 2 \text{ s}$ در نظر بگیرید. خطوط جریان لحظه‌ای در زمان $t = 2 \text{ s}$ را با خطوط مسیر و خطوط اثر حاصل در طی دوره زمانی از $t = 0 \text{ s}$ تا $t = 2 \text{ s}$ مقایسه کنید.

حل: قرار است که خطوط جریان، مسیر و اثر حاصل برای میدان سرعت غیر دائم با هم مقایسه شوند.

فرضیات: ۱- جریان تراکم‌ناپذیر است. ۲- جریان دو بعدی است که نشان‌دهنده این است که سرعت مؤلفه z نداشته و u و v نیز با z تغییر نمی‌کنند.

تحلیل: خطوط جریان لحظه‌ای در $t = 2 \text{ s}$ مشابه با شکل ۴-۱۷ هستند و تعدادی از آنها در شکل ۴-۲۶ به صورت مجدد رسم شده‌اند. برای شبیه‌سازی خطوط مسیر، از روش انتگرال‌گیری

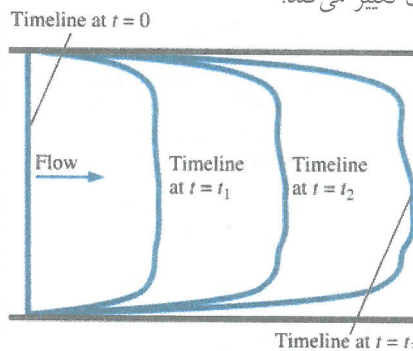


شکل ۴-۲۶ خطوط جریان، خطوط مسیر و خطوط اثر برای میدان سرعت نوسانی مثال ۴-۵. خطوط اثر و خطوط مسیر به خاطر تاریخچه زمانی آنها موجی شکل هستند اما خطوط جریان چون بیانگر تصویر لحظه‌ای میدان سرعت هستند موجی شکل نمی‌باشد.

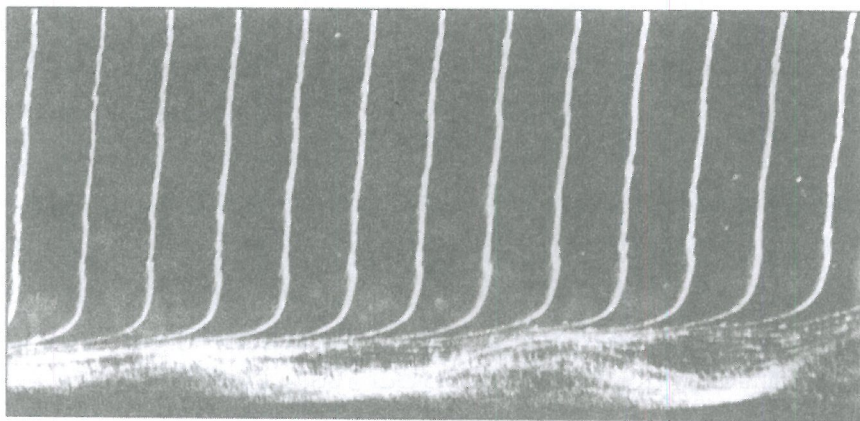
عددی رانگ- کوتا برای پیشروی در زمان از $t=0s$ تا $t=2s$ استفاده می‌کنیم و مسیر ذرات سیال منتشر شده را در سه مکان $(x=0.5m, y=0.5m)$ ، $(x=0.5m, y=2.5m)$ و $(x=0.5m, y=4.5m)$ مشخص می‌کنیم. این خطوط مسیر همراه با خطوط جریان در شکل ۴-۲۶ نشان داده شده‌اند. سرانجام، خطوط اثر را با دنبال کردن مسیر تعداد زیادی از ذرات رها شده در سه مکان معین در فاصله زمانی بین $t=0s$ و $t=2s$ می‌توان به دست آورده و مکان هندسی این مکان‌ها در $t=2s$ را به هم وصل کرد. این خطوط اثر در شکل ۴-۲۶ رسم شده‌اند. بحث: چون جریان غیر دائم است، خطوط جریان، خطوط مسیر و خطوط اثر بر هم منطبق نیستند. در واقع، آنها به طور چشمگیری با هم متفاوت هستند. گفتنی است که خطوط اثر و خطوط مسیر به خاطر طبیعت نوسانی مؤلفه z سرعت، موجی شکل هستند. دو دوره تناوب کامل نوسان بین $t=0s$ تا $t=2s$ اتفاق می‌افتد که با بررسی دقیق خطوط مسیر و اثر این موضوع تأیید می‌شود. چون خطوط جریان تاریخچه زمانی ندارند، خطوط جریان به صورت موجی شکل نیستند و آنها نشان‌دهنده تصویر لحظه‌ای میدان سرعت در $t=2s$ می‌باشند.

خطوط زمان

خط زمان شامل مجموعه‌ای از ذرات سیال مجاور هم هستند که همگی در یک زمان ثابت (قبل‌تر) علامت‌گذاری شده‌اند. به طور قطع خطوط زمان در مکان‌هایی که هدف محک یکنواختی جریان (یا عدم آن) است مفید خواهند بود. شکل ۴-۲۷ خطوط زمان در یک کانال جریان را که بین دو دیوار موازی قرار گرفته است نشان می‌دهد. به علت وجود اصطکاک در دیواره‌ها، سرعت سیال در آنجا صفر است (شرط عدم لغزش) و حدود پایین و بالای خط زمان از روی دیوارها شروع می‌شوند. در نواحی دور از دیوار، ذرات سیال با سرعت موضعی سیال حرکت کرده و شکل خط زمان تغییر می‌کند.



شکل ۴-۲۷ خطوط زمان با علامت‌گذاری یک خط سیال و سپس مشاهده حرکت (و تغییر شکل) آن خط در میدان جریان ایجاد می‌شود. خطوط زمان در $t=0, t_1, t_2, t_3$ نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۲۸ خطوط زمان ایجاد شده توسط یک سیم حباب هیدروژن برای مشاهده شکل پروفیل سرعت لایه مرزی مورد استفاده قرار می گیرد.

در مثال شکل ۴-۲۷، سرعت در نزدیک مرکز کانال تقریباً یکنواخت است، اما با گذشت زمان انحرافات کوچک موجود در خط زمان تقویت می شوند. خط زمان را به صورت آزمایشگاهی در یک کانال و با استفاده از سیم حباب هیدروژن می توان تولید کرد. با ارسال جریان الکتریکی به داخل سیم کاتد، الکترولیز آب شروع شده و حباب های کوچک گاز هیدروژن در اطراف سیم تشکیل می شوند. چون حباب ها کوچک هستند، نیروی شناوری آنها تقریباً قابل صرف نظر بوده و این حباب ها همراه جریان آب حرکت می کنند (شکل ۴-۲۸).

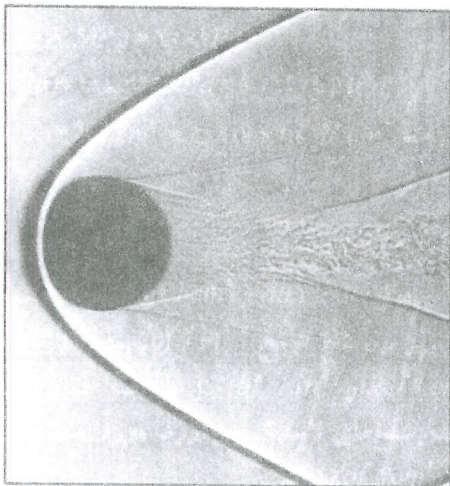
روش های انکساری مشاهده جریان

دسته دیگری از روش های مشاهده جریان بر اساس خاصیت شکست امواج نوری استوار هستند. اگر از درس فیزیک به یاد داشته باشید، سرعت نور عبوری از یک ماده با ماده دیگر متفاوت بوده و حتی در یک ماده خاص، اگر چگالی آن تغییر کند سرعت نور هم عوض می شود. هنگامی که نور از یک سیال به سیال دیگر با ضریب شکست متفاوت وارد شود، پرتوهای نور خم می شوند (آنها شکسته می شوند).

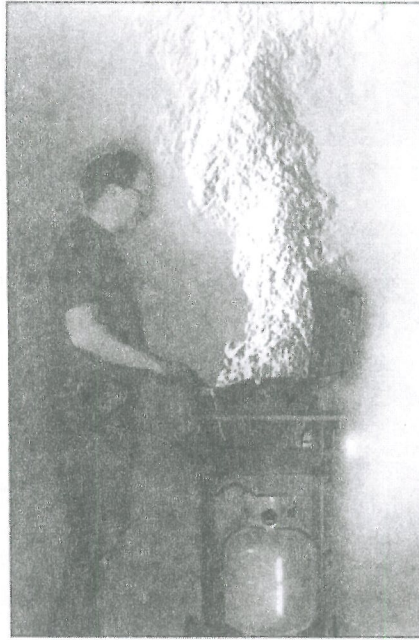
دو روش اصلی مشاهده جریان وجود دارند که در آنها از این خاصیت استفاده می شود که ضریب شکست در هوا (یا گازهای دیگر) تابعی از چگالی هوا می باشد. این دو روش، روش سایه نگاری و روش چیلرن (یتلس ۲۰۰۱) می باشند. شیوه بین لایه ای یکی از روش های دیگر مشاهده جریان است که از خاصیت مربوط به تغییر فاز نور به هنگام عبور از هوا با لایه های متفاوت می باشد که در اینجا بررسی نمی شود (مرزکریچ ۱۹۸۷ را ببینید). همه این روش ها در نقاطی که تغییرات چگالی از مکانی به مکان دیگر محسوس است به کار می روند، مانند

جریان‌های با جابه‌جایی طبیعی (اختلاف دما باعث تغییرات چگالی می‌شود)، جریان‌های اختلاطی (اجزای مختلف سیال باعث تغییر چگالی می‌شوند) و جریان‌های مافوق صوت (امواج ضربه‌ای و امواج انبساطی باعث تغییرات چگالی می‌شوند).

بر خلاف روش‌های مشاهده جریان که در برگیرنده خطوط اثر، خطوط مسیر و خطوط زمان هستند، در روش‌های سایه‌نگاری و چیلرن نیازی به تزریق ذرات ردیاب قابل مشاهده (مانند دود یا رنگ) نیست، بلکه اختلاف چگالی و خواص انکساری نور، ابزارهای لازم را برای مشاهده جریان فراهم کرده و امکان مشاهده جریان را به ما می‌دهند. تصویر (یک سایه نگار) تولیدی با روش سایه‌نگاری هنگامی به وجود می‌آید که اشعه‌های نور در قالب یک سایه بر روی یک صفحه حساس یا در کانون یک دوربین عکاسی تشکیل شده و سبب ظهور تصاویر سایه و روشن در سایه شوند. قسمت‌های تاریک نشان دهنده مکان‌هایی هستند که این اشعه‌ها از آنجا شروع شده‌اند و قسمت‌های روشن هم نشان دهنده قسمت‌هایی هستند که این اشعه‌ها به آنجا ختم می‌شوند، که این امر می‌تواند موجب گمراهی شود. در نتیجه نواحی تاریک نسبت به نواحی روشن کمتر از بین می‌روند و در تفسیر یک سایه‌نگار مفیدتر هستند. برای مثال در سایه‌نگار شکل ۴-۲۹ که به یک موج ضربه‌ای خمیده مربوط می‌شود نواحی تاریک که در پشت کره واقع شده‌اند، بسیار واضح‌تر از نواحی جلویی که تحت تأثیر روشنایی قرار گرفته‌اند، می‌باشند.



شکل ۴-۲۹ سایه‌نگاری یک کره به شعاع $14/3 \text{ mm}$ در حرکت آزادانه در هوا در $Ma = 3$ یک موج ضربه‌ای در سایه به صورت یک نوار تیره آشکارا قابل مشاهده است که حول کره خم شده است و موج خمیده نامیده می‌شود (فصل ۱۲ را ببینید).



شکل ۴-۳۰ تصویر چیلرن جابه‌جایی طبیعی ناشی از کباب کردن.

تصویر سایه نگار، یک تصویر نوری واقعی نیست، بلکه فقط یک سایه است. از طرفی یک تصویر چیلرن، شامل تعداد عدسی (یا آئینه‌ها) و یک لبه چاقویی یا هر ابزار برش دیگر است که برای سد کردن نور منعکس شده به کار می‌رود و در نتیجه تصویر آن یک تصویر نوری متمرکز شده دقیق است. بر پا کردن تصویربرداری چیلرن نسبت به روش سایه‌نگاری بسیار پیچیده‌تر است (برای جزئیات ستلس ۲۰۰۱ را ببینید)، اما دارای مزایای بیشتری است. برای مثال، یک تصویربرداری چیلرن از انحرافات نوری ناشی از انکسار امواج نور، تأثیر زیادی نمی‌پذیرد. تصویر برداری چیلرن هم‌چنین نسبت به گرادیان‌های ضعیف چگالی مانند آنهایی که توسط جابه‌جایی طبیعی ایجاد می‌شوند (شکل ۴-۳۰)، یا پدیده‌های تدریجی مانند فن‌های انبساطی در جریان مافوق صوت بسیار حساس‌تر هستند. روش عکس‌برداری رنگی چیلرن هم ایجاد شده است. سرانجام فرد می‌تواند اجزای زیادی از قبیل مکان، موقعیت و نوع ابزار برش را متناسب با تصویری که می‌خواهد ایجاد کند، در یک چیدمان چیلرن به کار برد.

روش‌های مشاهده جریان سطحی

سرانجام برخی از روش‌های مشاهده را که در سطوح جامد مفید هستند مختصراً ذکر می‌کنیم. جهت جریان سیال نزدیک یک سطح جامد را می‌توان به کمک تارهای نازک پشم که به سطح

چسبانده شده‌اند، به دست آورد. تارهای نخ برای مشخص کردن جریان‌های برگشتی در جریان‌های دارای جدایی بسیار کارآمد هستند.

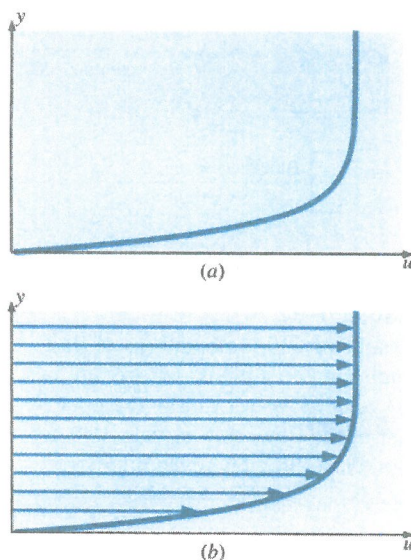
روش دیگری وجود دارد که به آن روش مشاهده سطحی روغن گفته می‌شود. روغنی که بر روی سطح مالیده شده رگه‌هایی را تشکیل می‌دهد که جهت جریان را نشان می‌دهند. در هنگام بارش خفیف باران هنگامی که ماشین شما کثیف است (خصوصاً در زمستان هنگامی که روی جاده‌ها نمک پاشی شده است) شما می‌توانید رگه‌های ایجاد شده بر روی کاپوت و درهای ماشین و یا حتی شیشه جلو اتومبیل را ببینید. این رگه‌ها مشابه با آن چیزی است که با مشاهده روغن سطحی قابل رؤیت است. سرانجام، رنگ‌هایی هستند که به فشار و دما حساس هستند و محققان می‌توانند از آنها برای نشان دادن توزیع فشار یا دما در امتداد سطوح جامد استفاده نمایند.

۴-۳ ترسیم اطلاعات جریان سیال

صرف نظر از این که نتایج چگونه به دست می‌آیند (تحلیلی، تجربی یا محاسباتی) معمولاً لازم است که اطلاعات را به گونه‌ای رسم کنیم که خواننده را قادر سازد تا چگونگی تغییر خواص را با زمان و یا با مکان مشاهده کند. شما قبل از این با منحنی‌های زمان که خصوصاً در جریان‌های مغشوش (مثلاً مؤلفه سرعت رسم شده به صورت تابعی از زمان) و منحنی‌های xy (مثلاً فشار، به صورت تابعی از شعاع) مفید هستند، آشنا شده‌اید. در این بخش با سه نوع منحنی دیگر که در مکانیک سیالات مفید هستند آشنا می‌شویم. این منحنی‌ها شامل منحنی‌های پروفیلی، منحنی‌های برداری و منحنی‌های کانتوری هستند.

منحنی‌های پروفیلی

یک منحنی پروفیلی، نشان‌دهنده چگونگی تغییرات یک خاصیت اسکالر در میدان جریان در یک جهت خاص است. منحنی‌های پروفیلی ساده‌ترین نوع منحنی‌ها برای درک مطلب هستند، زیرا این منحنی‌ها شبیه منحنی‌های xy معمول هستند که شما در دوران دبیرستان از آنها استفاده می‌کردید، یعنی چگونگی تغییر متغیر y را به صورت تابعی از متغیر دوم x رسم می‌کنید. در مکانیک سیالات، می‌توان منحنی‌های پروفیلی هر متغیر اسکالری (مانند فشار، دما، چگالی و ...) را ایجاد کرد، اما آنچه اغلب در این کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد، ترسیم پروفیل سرعت می‌باشد. توجه کنید که چون سرعت یک کمیت برداری است معمولاً مقدار سرعت یا یکی از مؤلفه‌های بردار سرعت را به صورت تابعی از فاصله در جهت داده شده رسم می‌کنیم. برای مثال، در جریان لایه مرزی شکل ۴-۲۸ یکی از خطوط زمان را در یک زمان مشخص به صورت منحنی پروفیل سرعت می‌توان رسم کرد، که البته باید توجه کرد که در زمان

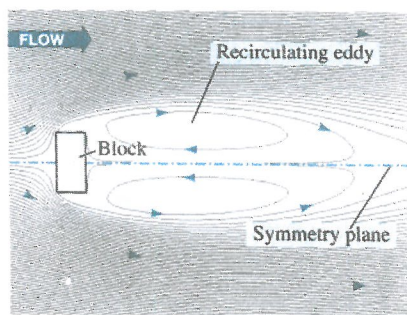


شکل ۴-۳۱ منحنی‌های پروفیلی مؤلفه افقی سرعت به صورت تابعی از فاصله عمودی، جریان در لایه مرزی در حال رشد در امتداد یک صفحه تخت افقی: (الف) منحنی پروفیل استاندارد و (ب) منحنی پروفیل با آرایه‌ها.

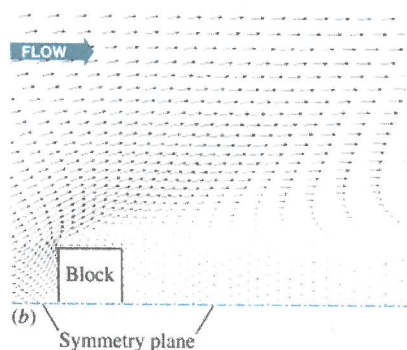
مشخص، فاصله افقی پیموده شده توسط حباب هیدروژن در مکان عمودی y با مؤلفه x بردار سرعت u متناسب می‌باشد. در شکل ۴-۳۱، u را به صورت تابعی از x رسم کرده‌ایم. برای ترسیم، مقادیر u را به صورت تحلیلی (فصل ۹ و ۱۰ را ببینید)، آزمایشگاهی با استفاده از PIV یا بعضی از ابزارهای اندازه‌گیری سرعت موضعی (فصل ۸ را ببینید)، یا به صورت محاسباتی (فصل ۱۵ را ببینید) می‌توان به دست آورد. گفتنی است که از لحاظ فیزیکی حتی با وجود مستقل بودن متغیرها در این مثال ترسیم u روی محور افقی نسبت به محور عمودی معنادارتر است، زیرا که مکان y معمولاً در جهت مناسبی (رو به بالا) نسبت به جهت افق رسم می‌شود. سرانجام مرسوم است که برای ایجاد وضوح بیشتر پیکان‌هایی را به پروفیل‌های سرعت اضافه کنند. البته اضافه کردن این پیکان‌ها سبب هیچ اطلاعات اضافی نمی‌شوند. اگر بیش از یک مؤلفه سرعت با این روش ترسیم شود، این پیکان‌ها جهت بردار سرعت موضعی را نشان می‌دهند و پروفیل سرعت به یک منحنی بردار سرعت تبدیل می‌شود.

منحنی‌های برداری

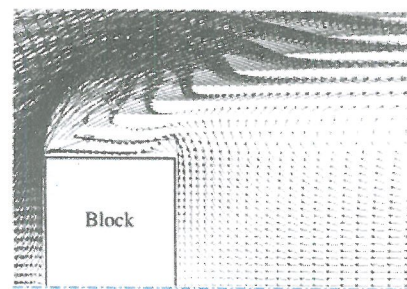
یک منحنی برداری مجموعه‌ای از پیکان‌هایی هستند که در یک زمان مشخص مقدار و جهت یک خاصیت برداری را نشان می‌دهند. با وجود این که خطوط جریان، جهت میدان



(a)



(b)



(c)

شکل ۴-۳۲ نتایج محاسبات *CFD* جریان برخوردی به یک بلوک؛ (الف) خطوط جریان، (ب) منحنی‌های بردار سرعت نیمه بالایی جریان و (ج) ترسیم بردارهای سرعت با نمای نزدیک شده برای آشکارسازی جزئیات بیشتر.

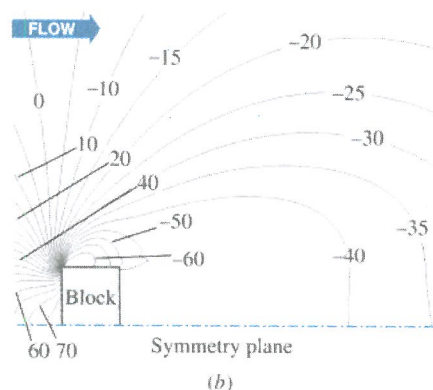
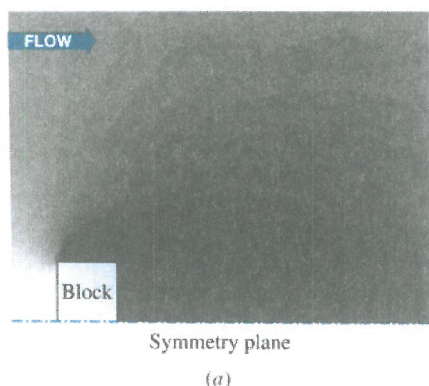
سرعت لحظه‌ای را نشان می‌دهند، اما این خطوط مستقیماً مقدار سرعت را نشان نمی‌دهند (یعنی تندی). یک الگوی مفید برای جریان‌های سیال آزمایشگاهی و محاسباتی ترسیم برداری آنها است که شامل مجموعه‌ای از پیکان‌ها است که هم مقدار و هم جهت یک خاصیت برداری لحظه‌ای را نشان می‌دهند. ما قبلاً در شکل ۴-۴ ترسیم یک بردار سرعت و در شکل ۴-۱۴ هم

ترسیم یک بردار شتاب را دیده‌ایم. این بردارها به صورت تحلیلی ایجاد شده بودند. منحنی‌های برداری هم چنین می‌توانند از اطلاعات آزمایشگاهی به دست آمده (مثلاً از اندازه‌گیری‌های *PIV*) یا به صورت عددی از محاسبات *CFD* به دست آیند. برای تشریح بهتر بردارهای سرعت، میدان جریان دوبعدی را که شامل جریان آزاد عبوری از روی یک بلوک مستطیلی شکل است در نظر می‌گیریم. محاسبات *CFD* را انجام می‌دهیم و نتایج در شکل ۴-۳۲ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که این جریان ذاتاً مغشوش و غیر دائم است، اما در اینجا تنها نتایج متوسط‌گیری شده زمانی محاسبه و نشان داده شده‌اند.

خطوط جریان در شکل ۴-۳۲ الف نشان داده شده‌اند و نمایی از کل بلوک و بخش بزرگی از دنباله آن در شکل نشان داده شده است. خطوط جریان بسته در بالا و پایین صفحه تقارن بیان‌کننده گردابه‌های بزرگ چرخشی هستند. یک نمودار برداری در شکل ۴-۳۲ ب نشان داده شده است (به علت تقارن، تنها نیمه بالایی نشان داده شده است). از این شکل واضح است که جریان در گوشه بالا دست بلوک شتاب می‌گیرد. در واقع لایه مرزی بر روی گوشه تیز تشکیل نشده و از بلوک جدا شده و در پایین دست بلوک گردابه‌های چرخشی بزرگی ایجاد می‌شود. (توجه کنید که این بردارهای سرعت مقادیر متوسط‌گیری شده زمانی هستند، مطابق با آنچه در شکل ۴-۲۵ الف نشان داده شده است). در هنگام ریزش گردابه‌ها، بردارهای لحظه‌ای هم از لحاظ جهت و هم مقدار نسبت به زمان تغییر می‌کنند. تصویر بزرگ شده‌ای از ناحیه جریان جدا شده در شکل ۴-۳۲ ج نشان داده شده است که در آنجا جریان معکوسی را در نیمه پایینی گردابه چرخشی بزرگ نشان می‌دهد. برنامه‌های پیشرفته *CFD* و پیش پردازنده‌های آنها می‌توانند یک نمودار برداری را به صورت رنگی نشان دهند. مثلاً بردارها می‌توانند بر اساس بعضی خواص جریان از قبیل فشار (قرمز برای فشارهای زیاد و آبی برای جریان‌های با فشار کم) و دما (قرمز برای گرم و آبی برای سرد) رنگی شوند. به همین طریق و با شیوه‌ای مشابه نه تنها مقدار و جهت جریان بلکه سایر خواص جریان را هم می‌توان نمایش داد.

منحنی‌های کانتوری

منحنی‌های کانتوری، منحنی‌های مقادیر ثابت یک خاصیت اسکالر (یا مقدار یک خاصیت برداری) در یک زمان مشخص را نشان می‌دهند. اگر اهل کوهنوردی باشید، با نقشه‌های کانتوری مسیرهای کوهستانی آشنا هستید. نقشه‌ها شامل مجموعه‌ای از منحنی‌های بسته هستند که هر کدام نشان دهنده یک ارتفاع ثابت می‌باشند. در نزدیکی مرکز یک گروه از چنین منحنی‌هایی، قله کوه‌ها یا دره‌ها واقع شده‌اند، که قله یا دره واقعی در روی نقشه است که بیانگر بیشترین و یا کمترین ارتفاع می‌باشد. چنین نقشه‌هایی نه تنها از این نظر که یک دید کلی از کل منطقه می‌دهند مفید هستند، بلکه شما را قادر می‌سازند تا به راحتی ارتفاع محل خود را تشخیص داده و آرام و یا تند بودن شیب‌ها را مشخص سازید.



شکل ۴-۳۳ منحنی‌های کانتوری میدان فشار ناشی از عبور جریان از روی یک بلوک که از محاسبات *CFD* حاصل شده است؛ به علت تقارن فقط نیمه بالایی نشان داده شده است، (الف) منحنی‌های خاکستری نمودارهای کانتور هستند و (ب) خطوط کانتوری که مقادیر فشار را برحسب واحد Pa (پاسکال) فشار نسبی نشان می‌دهند..

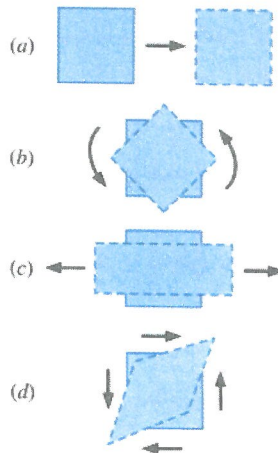
در مکانیک سیالات، شیوه مشابهی را به سایر خواص اسکالر جریان اعمال می‌کنند و نمودارهای کانتوری را برای (که منحنی‌های ایزوکانتور نیز نامیده می‌شوند) فشار، دما، مقدار سرعت، تمرکز ذرات، خواص اغتشاش و ... ایجاد می‌کنند. یک منحنی کانتوری، قادر به نمایش نواحی با تمرکز بالا یا پایین هر خاصیت از جریان مورد بررسی است. یک نمودار کانتوری ممکن است صرفاً شامل منحنی‌های ساده‌ای باشد که سطوح مختلف یک خاصیت را نشان می‌دهند، که به این نمودار، نمودار خط کانتوری اطلاق می‌شود. به همین ترتیب می‌توان کانتورها را با رنگ‌ها یا سایه‌های خاکستری پر کرد که به این نمودارها، نمودار کانتوری پر شده می‌گویند. مثالی از کانتورهای فشار برای جریانی مشابه با شکل ۴-۳۲ در شکل ۴-۳۳

نشان داده شده است. در شکل ۴-۳۳ الف برای مشخص کردن نواحی سطوح فشار مختلف، کانتورهای پر شده با استفاده از سایه‌های خاکستری نشان داده شده‌اند. نواحی تاریک مبین فشار پایین و نواحی روشن مبین فشار بالا هستند. از روی این شکل واضح است که در صفحه جلویی بلوک فشار بیشترین مقدار بوده و در قسمت بالایی بلوک و در ناحیه جدا شده پایین‌ترین فشار را داریم و همان‌طور که انتظار می‌رود در ناحیه دنبال بلوک هم فشار پایین است. در شکل ۴-۳۳ ب کانتورهای با مقدار فشار یکسان رسم شده‌اند. بر روی خطوط کانتور فشار ثابت، مقدار فشار نسبی بر حسب واحد پاسکال نوشته شده‌اند.

در *CFD* منحنی‌های کانتوری اغلب با رنگ‌های روشن نشان داده می‌شوند که معمولاً رنگ قرمز بیانگر بیشترین مقدار یک خاصیت و رنگ آبی کمترین مقدار آن خاصیت می‌باشد. چشم یک فرد سالم به آسانی می‌تواند ناحیه‌های آبی یا قرمز را تشخیص داده و نواحی با مقدار بالا یا پایین خاصیت جریان را شناسایی کند. به علت تصاویر زیبایی که توسط *CFD* ایجاد می‌شود، اغلب به دینامیک سیال محاسباتی نام مستعار دینامیک سیال رنگی داده می‌شود.

۴-۴ دیگر توضیحات سینماتیکی

همانند مکانیک جامدات، در مکانیک سیالات یک المان سیال در معرض چهار نوع حرکت یا تغییر شکل قرار می‌گیرد که به صورت دو بعدی در شکل ۴-۳۴ الف نشان داده شده‌اند، (الف) انتقال، (ب) چرخش، (ج) کرنش خطی (بعضی اوقات کرنش انبساطی نامیده می‌شود) و (د) کرنش برشی.



شکل ۴-۳۴ گونه‌های اساسی حرکت یا تغییر شکل یک المان سیال: (الف) انتقال، (ب) چرخش، (ج) کرنش خطی و (د) کرنش برشی

چون که معمولاً این چهار نوع حرکت یا تغییر شکل به صورت همزمان اتفاق می‌افتند، مطالعه مکانیک سیالات پیچیده‌تر می‌شود. به علت حرکت ثابت المان‌های سیال در دینامیک سیالات، ترجیح داده می‌شود که حرکت و تغییر شکل سیال را بر حسب نرخ‌ها بیان کنیم. در واقع در این رابطه‌ها برای سرعت از نرخ جابه‌جایی برای سرعت زاویه‌ای از نرخ چرخش، برای کرنش خطی از نرخ کرنش خطی و برای کرنش زاویه‌ای از نرخ کرنش زاویه‌ای استفاده می‌کنیم. برای این‌که این نرخ‌های تغییر شکل در محاسبات مکانیک سیالات مفید واقع شوند آنها را باید بر حسب سرعت و مشتقات سرعت بیان کرد.

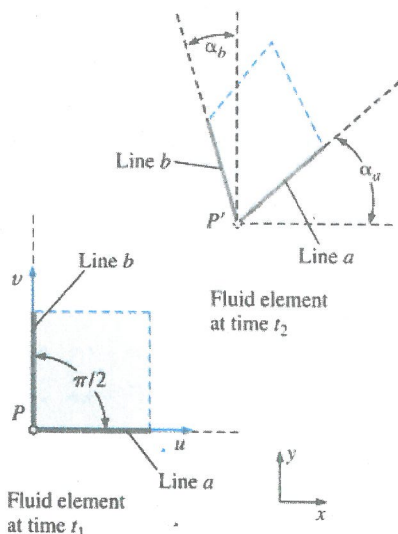
از آنجایی که جابه‌جایی و چرخش عموماً در حرکت ذرات جامد مانند توپ‌های بیلیارد (شکل ۴-۱) عمل می‌کنند، حرکت آنها به آسانی قابل درک است. برای تشریح کامل نرخ جابه‌جایی در حالت سه بعدی به یک بردار نیاز است. از نقطه نظر ریاضی، نرخ بردار جابه‌جایی به صورت بردار سرعت نشان داده می‌شود. در مختصات کارتزین داریم:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (4-19)$$

در شکل ۴-۳۴ الف، به علت حرکت المان سیال در جهت افقی مثبت (x) ، u مثبت بوده و v و w صفر هستند.

نرخ چرخش (سرعت زاویه‌ای) در یک نقطه، به صورت میانگین نرخ چرخش دو خط متقاطع در آن نقطه که در ابتدا بر هم عمود بوده‌اند تعریف می‌شود. برای مثال در شکل ۴-۳۴ ب، نقطه‌ای را در گوشه سمت چپ پایین یک المان سیال مربعی شکل در نظر بگیرید. در ابتدا لبه سمت چپ و پایینی المان در یک نقطه با هم تلاقی داشته و بر هم عمود هستند. این دو خط به صورت پادساعتگرد می‌چرخند که از نظر ریاضی چرخش آنها مثبت محسوب می‌شود. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است به علت چرخش یکپارچه المان زاویه میان این دو خط (یا میان هر دو خط عمود بر هم در المان سیال) همواره 90° باقی می‌ماند. بنابراین هر دو خط با نرخ یکسان می‌چرخند و به طور ساده نرخ چرخش در آن صفحه، مؤلفه سرعت زاویه‌ای در آن صفحه است.

در حالت کلی، در حالت دو بعدی (شکل ۴-۳۵)، ذره سیال در حین چرخش هم جابه‌جا شده و هم تغییر شکل می‌دهد و نرخ چرخش مطابق تعریف قبلی محاسبه می‌شود. برای مثال، در زمان t دو خط عمود بر هم (خطوط a و b در شکل ۴-۳۵) را که در صفحه xy در نقطه P همدیگر را قطع کرده‌اند، در نظر بگیرید. در یک بازه زمانی $t_1 - t_2 = dt$ در حالی که این خطوط حرکت کرده و یا می‌چرخند، آنها را دنبال می‌کنیم. در زمان t_2 خط a به



شکل ۴-۳۵ برای یک جز سیال که مطابق شکل منتقل شده و تغییر شکل می‌یابد، نرخ چرخش در نقطه P به صورت میانگین نرخ چرخش دو خط که در ابتدا بر هم عمود بوده‌اند تعریف می‌شود (خطوط a و b).

اندازه زاویه α_a و خط b به اندازه زاویه α_b چرخیده‌اند و همان‌طور که نشان داده شده است، هر دو خط با جریان حرکت می‌کنند (مقادیر زاویه بر حسب رادیان داده شده است که در شکل از نظر ریاضی مثبت تلقی می‌شوند). بنابراین زاویه چرخش متوسط $(\alpha_a + \alpha_b)/2$ می‌باشد و نرخ چرخش یا سرعت زاویه‌ای در صفحه xy با مشتق زمانی این زاویه چرخش متوسط برابر می‌باشد،

$$\omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (۴-۲۰)$$

سمت راست معادله ۴-۲۰ را که در آن ω را به جای زوایای α_a و α_b بر حسب مؤلفه‌های سرعت u و v نوشتیم به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

در حالت سه بعدی چون مقدار نرخ چرخش در یک نقطه در هر سه بعد متفاوت است باید برداری را تعریف کرد. نحوه استخراج بردار نرخ چرخش در سه بعد را در بسیاری از کتب مکانیک سیالات از جمله کوندا (۱۹۹۰) و دوايت (۱۹۹۱) می‌توان پیدا کرد. نرخ بردار

چرخش با بردار سرعت زاویه‌ای برابر است و در مختصات کارتزین به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (۲۱-۴)$$

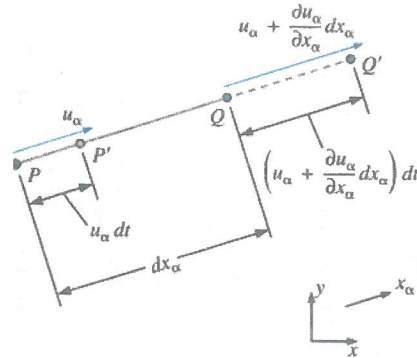
نرخ کرنش خطی به صورت نرخ افزایش طول بر واحد طول بیان می‌شود. از نقطه نظر ریاضی نرخ کرنش خطی در یک المان سیال، به موقعیت و جهت اولیه قطعه‌ای از خط که کرنش خطی را در آن اندازه می‌گیریم بستگی دارد. بنابراین آن را به عنوان یک اسکالر یا کمیت برداری نمی‌توان بیان کرد. در عوض، نرخ کرنش خطی را در هر جهت دلخواه مانند x_α تعریف می‌کنیم. برای مثال، پاره خط PQ در شکل ۴-۳۶ دارای طول اولیه dx_α است و مطابق شکل به پاره خط $P'Q'$ تبدیل می‌شود. با استفاده از تعریف داده شده و خطوط مشخص شده در شکل ۴-۳۶، نرخ کرنش خطی در جهت x_α به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{P'Q' - PQ}{PQ} \right) \quad (۲۲-۴)$$

$$\cong \frac{d}{dt} \left(\frac{\overbrace{\left(u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \right) dt + dx_\alpha - u_\alpha dt}^{\text{طول پاره خط } P'Q' \text{ در جهت } x_\alpha} - \underbrace{dx_\alpha}_{\text{طول پاره خط } PQ \text{ در جهت } x_\alpha}}{dx_\alpha} \right) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

معمولاً در مختصات کارتزین، جهت x_α را در راستای هر یک از سه محور مختصات در نظر می‌گیریم، با این وجود خود را فقط به این جهات محدود نمی‌کنیم. نرخ کرنش خطی در مختصات کارتزین به صورت زیر است،

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (۲۳-۴)$$

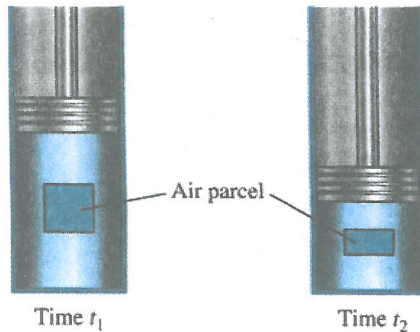


شکل ۴-۳۶ نرخ کرنش خطی در جهت دلخواه x_α به صورت نرخ افزایش طول بر واحد طول در آن جهت تعریف می‌شود. اگر طول تکه خط کاهش یابد نرخ کرنش خطی منفی خواهد بود. در اینجا، با افزایش در طول تکه خط PQ به تکه خط $P'Q'$ آن را دنبال می‌کنیم که منجر به نرخ کرنش خطی مثبت می‌شود. چون dx_α و dt بسیار کوچک هستند.

در حالت کلی، المان سیال همان‌گونه که در شکل ۴-۳۵ رسم شده است در حال حرکت و تغییر شکل است. این که نشان دهیم که معادله ۴-۲۳ هنوز هم برای حالت کلی معتبر است را به عنوان تمرین به خوانندگان واگذار می‌کنیم.

وقتی اجسام جامد مانند سیم‌ها، میله‌ها و تیرها را می‌کشیم آنها کش می‌آیند. از بررسی مکانیک مهندسی می‌دانیم که معمولاً هنگامی که جسمی در یک جهت کشیده می‌شود، در جهات عمود بر آن جهت جمع می‌شود. چنین چیزی برای المان‌های سیال هم صحیح است. در شکل ۴-۳۴ ج، المان سیال مربعی در جهت افقی کشیده شده است و در جهت عمودی جمع شده است. بنابراین نرخ کرنش خطی در جهت افقی مثبت و در جهت عمودی منفی است.

اگر جریان تراکم‌ناپذیر باشد، حجم خالص المان سیال باید ثابت بماند، بنابراین اگر المان، در یک جهت کشیده شود برای جبران کش آمدن آن باید در جهات دیگر جمع شود. در عوض، حجم یک المان سیال تراکم‌پذیر، با کاهش یا افزایش چگالی آن به ترتیب افزایش یا کاهش می‌یابد (جرم المان سیال باید ثابت بماند، اما چون $\rho = m/V$ ، چگالی و حجم عکس یکدیگرند). برای مثال مجموعه‌ای از هوا را که در سیلندری قرار داشته و توسط پیستونی فشرده می‌شود را در نظر بگیرید (شکل ۴-۳۷). طبق اصل بقای جرم با افزایش چگالی سیال حجم آن کاهش می‌یابد. نرخ افزایش حجم المان سیال بر واحد حجم را نرخ کرنش حجمی یا نرخ کرنش بالک می‌نامند. این خاصیت سینماتیکی به صورتی تعریف شده است که به هنگام افزایش



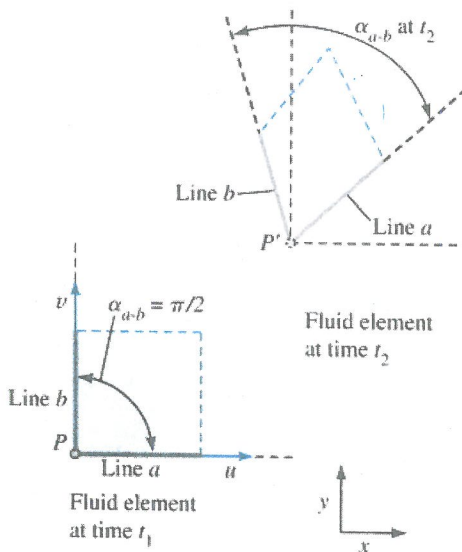
شکل ۴-۳۷ در هنگام فشرده شدن هوا در یک سیلندر به وسیله یک پیستون، حجم المان سیال در سیلندر کاهش می‌یابد، که منجر به نرخ انبساط حجمی منفی می‌شود.

حجم، مقدار آن مثبت است. عبارت دیگری که مترادف با نرخ کرنش حجمی است، نرخ اتساع حجمی است که اگر به بزرگ شدن عدسی چشم به هنگامی که در معرض نور کم قرار دارد فکر کنید، به راحتی آن را درک خواهید کرد. پس به این نتیجه می‌رسیم که نرخ کرنش حجمی، مجموع نرخ‌های کرنش خطی در سه جهت عمود بر هم می‌باشد. بنابراین در مختصات کارتزین (شکل ۴-۲۳) نرخ کرنش حجمی به صورت زیر است:

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4-24)$$

در معادله ۴-۲۴ نماد D برای تأکید بر این نکته است که ما در مورد حجم یک المان سیال صحبت می‌کنیم و بنابراین مشابه با فرمول ۴-۱۲ به آن، حجم مادی المان سیال می‌گوییم، پس نرخ کرنش حجمی در جریان تراکم‌ناپذیر صفر است.

تشریح و فهم نرخ کرنش برشی دشوارترین نرخ تغییر شکل می‌باشد. نرخ کرنش برشی در یک نقطه به صورت نرخ کاهش زاویه بین دو خط متقاطع در آن نقطه که در حالت اولیه بر هم عمود بوده‌اند تعریف می‌شود (هنگامی که نرخ کرنش برشی و نرخ کرنش خطی در یک تانسور را با هم ترکیب می‌کنیم دلیل وجود استفاده از نصف واضح خواهد شد). برای مثال در شکل ۴-۳۴ د زاوای 90° اولیه در گوشه‌های سمت چپ-پایین و سمت راست-بالا در المان سیال مربعی کاهش می‌یابند که مطابق با تعریف کرنش برشی مثبت می‌باشند. با این وجود، زوایای گوشه‌های سمت چپ-بالا و سمت راست-پایین افزایش خواهند یافت که مطابق با تعریف



شکل ۴-۳۸ مطابق شکل، برای یک جز سیال که جابه‌جا شده و تغییر شکل می‌دهد نرخ کرنش برشی در نقطه P به صورت نصف کاهش زاویه میان دو خط که در ابتدا برهم عمود بوده‌اند تعریف می‌شود (خطوط a و b).

کرنش، منفی هستند. واضح است که برای این موضوع نمی‌توان نرخ کرنش برشی را تنها بر حسب یک کمیت اسکالر یا برداری تشریح کرد. هم‌چنین، توصیف کامل ریاضی نرخ کرنش برشی، به تعریف آن در هر دو جهت عمود بر هم نیاز دارد. در مختصات کارتزین، خود محورها بهترین انتخاب برای این جهات هستند، اگر چه خود را فقط به آنها محدود می‌کنیم. المان سیال را در صفحه xy به صورت دو بعدی در نظر بگیرید. همان‌طور که در شکل ۴-۳۸ نشان داده شده این المان با گذشت زمان جابه‌جا شده و تغییر شکل می‌دهد. دو خط که در ابتدا بر هم عمود بوده‌اند (خط a در جهت x و خط b در جهت y) را در نظر بگیرید. مطابق شکل زاویه میان این دو خط از $\pi/2$ (90°) به زاویه مشخص شده α_{a-b} در زمان t_2 کاهش می‌یابد. نرخ کرنش برشی در نقطه P برای خطوط عمود برهم در جهات x و y به صورت زیر است که اثبات آن را به عنوان تمرین به خوانندگان واگذار می‌کنیم،

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha_{a-b} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (25-4)$$

معادله ۴-۲۵ را می‌توان به آسانی به سه بعد بسط داد. بنابراین نرخ کرنش برشی به صورت زیر است:

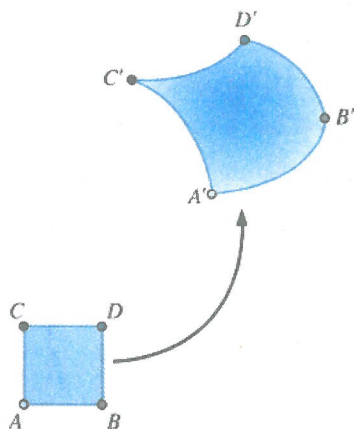
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (۴-۲۶)$$

سرانجام، به این نتیجه می‌رسیم که از نظر ریاضی می‌توان نرخ کرنش خطی و نرخ کرنش برشی را در یک تانسور متقارن مرتبه دوم، که تانسور نرخ کرنش نامیده می‌شود با هم ترکیب کرد که این تانسور، ترکیب معادلات ۴-۲۳ و ۴-۲۶ است:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (۴-۲۷)$$

تانسور نرخ کرنش از تمام قواعد تانسورهای ریاضی مانند نامتغیرهای تانسور، قوانین تبدیل و محورهای اصلی تبعیت می‌کند.

شکل ۴-۳۹ موقعیت کلی (اگر چه دو بعدی) یک جریان سیال تراکم‌پذیر را به صورت همزمان با تمام حرکات و تغییر شکل‌های ممکن آن نشان می‌دهد. در اینجا جابه‌جایی، چرخش، کرنش خطی و کرنش زاویه‌ای وجود دارد. هم‌چنین به علت طبیعت تراکم‌پذیر



شکل ۴-۳۹ یک جز سیال که انتقال، چرخش، کرنش خطی، کرنش زاویه‌ای و کرنش حجمی را تشریح می‌کند.

سیال، کرنش حجمی (انبساط) هم وجود دارد. اینک شما باید درک بهتری از پیچیدگی ذاتی دینامیک سیال و مهارت ریاضی مورد نیاز برای تشریح کامل جریان سیال به دست آورده باشید.

مثال ۴-۶ محاسبه خواص سینماتیکی در جریان دو بعدی

میدان سرعت دو بعدی و پایدار مثال ۴-۱ را در نظر بگیرید:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 + 0.8y)\vec{j} \quad (1)$$

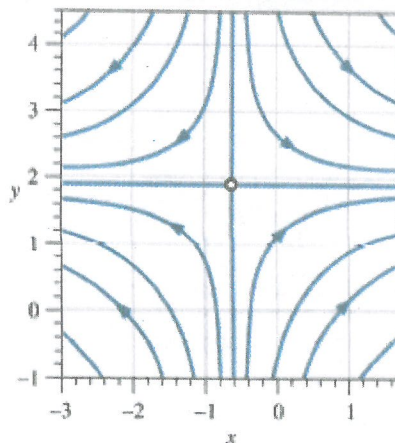
که طول‌ها بر حسب m زمان بر حسب s و سرعت‌ها بر حسب m/s می‌باشند. مطابق شکل ۴-۴ نقطه سکونی در مکان $(-0.625, 1.875)$ قرار دارد. هم‌چنین خطوط جریان در شکل ۴-۴ رسم شده‌اند. خواص مختلف سینماتیکی از قبیل نرخ جابه‌جایی، نرخ چرخشی، نرخ کرنش خطی، نرخ کرنش برشی و نرخ کرنش حجمی را محاسبه کنید. ثابت کنید که جریان تراکم‌ناپذیر است.

حل: خواص سینماتیک مختلف برای میدان سرعت داده شده را محاسبه می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که جریان تراکم‌ناپذیر است.

فرضیات: ۱- جریان دائم است. ۲- جریان دو بعدی است، یعنی از مؤلفه z سرعت صرف‌نظر شده است و u و v تابع z نیستند.

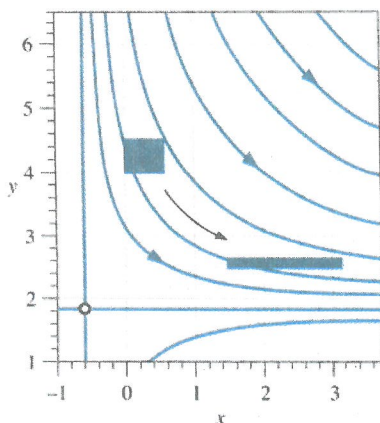
تحلیل: بر طبق معادلات ۴-۱۹ نرخ جابه‌جایی با خود بردار سرعت برابر است که در معادله ۱ داده شده است. بنابراین:

$$u = 0.5 + 0.8x \quad v = 1.5 + 0.8y \quad w = 0 \quad (2)$$



شکل ۴-۴ خطوط جریان برای میدان سرعت مثال ۴-۶. نقطه سکون توسط یک دایره در

$x = -0.625m$ و $y = 1.875m$ نشان داده شده است.



شکل ۴-۴۱ تغییر شکل یک جز مربعی سیال مرتبط با میدان سرعت مثال ۴-۶
برای یک دوره زمانی ۰.۵ s. نقطه سکون به وسیله یک دایره در $x = -0.625\text{ m}$ و
 $y = 1.875\text{ m}$ نشان داده شده است و تعدادی از خطوط جریان ترسیم شده است.

نرخ چرخش با استفاده از معادله ۴-۲۱ به دست می‌آید. در این حالت چون در همه جا $w=0$ است و u و v با z تغییر نمی‌کنند، تنها مؤلفه غیر صفر، نرخ چرخش در جهت z است. بنابراین

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{1}{2} (0 - 0) \vec{k} = 0 \quad (3)$$

در این حالت، می‌بینیم که ذرات سیال در حین حرکت هیچ چرخش خالصی ندارند. (این قسمت قابل توجهی از اطلاعات است که با جزئیات بیشتر در این فصل و فصل ۱۰ در مورد آن بحث خواهد شد).

نرخ‌های کرنش خطی در هر جهت دلخواه را با استفاده از معادله ۴-۲۲ می‌توان محاسبه کرد. در جهات x ، y و z نرخ‌های کرنش خطی، معادله ۴-۲۳، به صورت زیر هستند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.18\text{ s}^{-1} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -0.18\text{ s}^{-1} \quad \varepsilon_{zz} = 0 \quad (4)$$

بنابراین، پیش‌بینی می‌کنیم که ذرات سیال در جهت x کشیده شده (نرخ کرنش خطی مثبت) و در جهت y جمع می‌شوند (نرخ کرنش خطی منفی). این موضوع در شکل ۴-۴۱ نشان داده شده است که در آنجا مرکز تکه مربعی سیال در $(0.25, 4.25)$ قرار گرفته است. با انتگرال‌گیری از رابطه (۲) نسبت به زمان، مکان چهار گوشه سیال مشخص شده را بعد از گذشت ۱/۵ ثانیه محاسبه می‌کنیم. در واقع بر طبق پیش‌بینی این بخش سیال در جهت x کشیده شده و در جهت y جمع می‌شود.

نرخ کرنش برشی با استفاده از معادله ۴-۲۶ تعیین می‌شود. به علت دو بعدی بودن، نرخ‌های کرنش برشی غیر صفر تنها می‌توانند در صفحه xy اتفاق بیفتند. با استفاده از خطوط موازی با محورهای x و y به عنوان خطوط عمود اولیه، ε_{xy} با استفاده از معادله ۴-۲۶ محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0 \quad (5)$$

بنابراین، همان‌طور که در شکل ۴-۴۱ نشان داده شده است، هیچ کرنش برشی در این جریان وجود ندارد. پس با وجود این که ذره سیال تغییر شکل می‌دهد، ولی به صورت مستطیلی باقی می‌ماند و زاویه گوشه 90° اولیه در طی دوره زمانی محاسبه 90° باقی می‌ماند. سرانجام، نرخ کرنش حجمی با استفاده از معادله ۴-۲۴ محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (0/8 - 0/8 + 0) s^{-1} = 0 \quad (6)$$

چون نرخ کرنش حجمی در هر جایی صفر است، با قاطعیت می‌توانیم بگوییم که حجم ذرات سیال نه زیاد (انبساط) و نه کم می‌شود (فشرده‌گی). بنابراین ثابت کردیم که این جریان به طور قطع تراکم‌ناپذیر است. در شکل ۴-۴۱ مساحت ذره سیال هاشور خورده در طی حرکت و تغییر شکل آن در میدان جریان ثابت باقی می‌ماند.

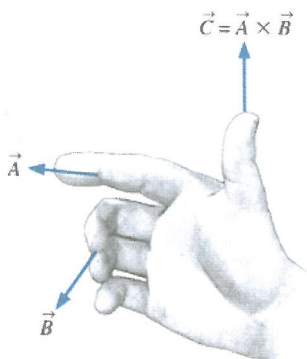
بحث: در این مثال مشخص شد که نرخ‌های کرنش خطی (ε_{xx} و ε_{yy}) مخالف صفر هستند، در حالی که نرخ‌های کرنش برشی (ε_{xy} و همتای متقارن آن یعنی ε_{yx}) صفر هستند. این بدان معناست که در این میدان جریان، محورهای x و y محورهای اصلی هستند. بنابراین، تانسور نرخ کرنش (دو بعدی) در این مکان به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0/8 & 0 \\ 0 & -0/8 \end{pmatrix} s^{-1} \quad (7)$$

اگر محورها را با زاویه دلخواهی بچرخانیم، محورهای جدید، محورهای اصلی نیستند و هر چهار مؤلفه تانسور نرخ کرنش غیر صفر خواهند شد. احتمالاً از مکانیک جامدات به خاطر دارید که با استفاده از دایره مور، می‌توان محورهای اصلی، کرنش‌های برشی ماکزیمم و غیره را حساب کنید. تحلیل مشابهی را هم در مکانیک سیالات می‌توان انجام داد.

گردابی و چرخشی بودن

قبلاً بردار نرخ چرخش المان سیال را تعریف کردیم (شکل ۴-۲۱ را ببینید). خاصیت سینماتیکی تقریباً مرتبطی وجود دارد که در تحلیل جریان‌های سیال دارای اهمیت بسیاری است. از نقطه نظر ریاضی بردار گردابی به صورت کرل بردار سرعت $\vec{V}$ تعریف می‌شود،



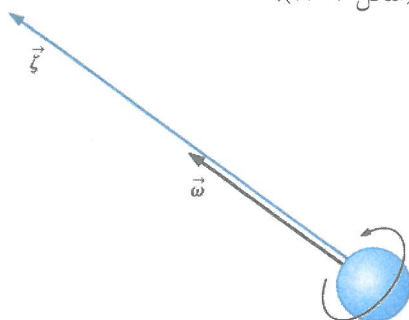
شکل ۴-۴ جهت بردار حاصل ضرب خارجی توسط قاعده دست راست تعیین می‌شود.

$$\vec{\zeta} = \vec{V} \times \vec{V} = \text{curl}(\vec{V}) \quad (۲۸-۴)$$

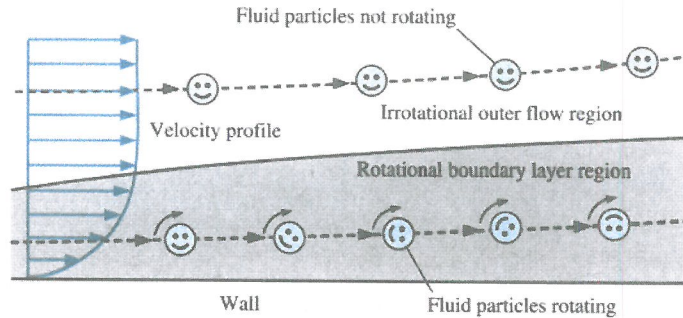
جهت بردار گردابی را با استفاده از قاعده دست راست برای ضرب برداری می‌توان تعیین کرد (شکل ۴-۴). نماد یونانی ζ (زتا) برای گردابی استفاده می‌شود. گفتنی است که استفاده از این نماد برای گردابی در کتاب‌های مکانیک سیالات یک قرارداد جهانی نیست و بعضی نویسندگان از حرف یونانی ω (اُمگا) و برخی دیگر از Ω (اُمگا به صورت حرف بزرگ Ω) استفاده کرده‌اند. در این کتاب از $\vec{\omega}$ برای نشان دادن نرخ بردار چرخش (بردار سرعت زاویه‌ای) یک المان سیال استفاده می‌شود. واضح است که بردار نرخ چرخش برابر با نصف بردار گردابی است:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{V} \times \vec{V} = \frac{1}{2} \text{curl}(\vec{V}) = \frac{\vec{\zeta}}{2} \quad (۲۹-۴)$$

بنابراین گردابی معیاری از چرخش ذره سیال است و به طور خاص گردابی دو برابر سرعت زاویه‌ای ذره سیال است (شکل ۴-۴۳).



شکل ۴-۴۳ بردار گردابی دو برابر بردار سرعت زاویه‌ای یک ذره سیال چرخان می‌باشد.

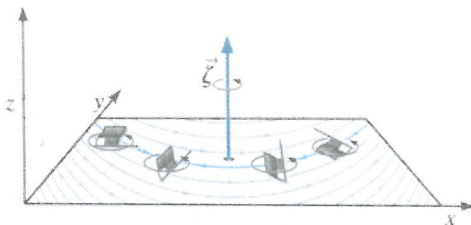


شکل ۴-۴ تفاوت میان جریان غیر چرخشی و چرخشی: اجزاء سیال در یک ناحیه چرخشی جریان می‌چرخند اما آنهایی که در ناحیه غیر چرخشی جریان هستند، نمی‌چرخند.

اگر در نقطه‌ای از میدان جریان گردابی غیر صفر باشد ذره سیالی که این نقطه را در فضا اشغال کرده در حال چرخش خواهد بود و چنین جریانی در این ناحیه جریان چرخشی نامیده می‌شود. هم‌چنین، اگر گردابی در یک ناحیه از جریان صفر باشد (یا قابل صرف‌نظر) ذرات سیال موجود نمی‌چرخند و جریان در این ناحیه غیر چرخشی است. از نقطه نظر فیزیکی، در یک ناحیه چرخشی، ذرات سیال در هنگام حرکت در طول جریان می‌چرخند. مثلاً، ذرات سیال موجود در لایه مرزی لزج در نزدیک دیوار جامد چرخشی هستند (و بنابراین گردابی غیر صفر است)، در حالی‌که ذرات سیال خارج از لایه مرزی غیر چرخشی هستند (و گردابی آنها صفر است). این دو حالت در شکل ۴-۴ نشان داده شده‌اند.

المان سیال مرتبط با دنباله‌ها، لایه‌های مرزی، جریان عبوری از توربومشین‌ها (فن‌ها، توربین‌ها، کمپرسورها و ...) و جریان با انتقال حرارت همگی چرخشی هستند. گردابی یک المان سیال را به جز با اعمال لزجت، حرارت دادن غیر یکنواخت (گرادیان‌های دمایی) یا هر پدیده غیر یکنواخت دیگر نمی‌توان تغییر داد.

بنابراین، اگر جریانی از یک ناحیه غیر چرخشی آغاز شود تا زمانی که فرایند غیر یکنواختی آن را تغییر ندهد به صورت غیر چرخشی باقی می‌ماند. برای مثال، هوای ورودی از یک محیط ساکن غیر چرخشی است و غیر چرخشی هم باقی می‌ماند مگر این‌که در مسیر آن با مانعی مواجه شده و یا در معرض حرارت دادن غیر یکنواخت قرار گیرد. در فصل ۱۰ خواهید دید که اگر ناحیه‌ای از جریان را به صورت یک ناحیه غیر چرخشی بتوان تقریب زد، معادلات حرکت در آن ناحیه به شکل چشمگیری ساده خواهند شد.



شکل ۴-۴۵ برای جریان دو بعدی در صفحه xy ، بردار گردابی همیشه به سمت z یا جهت z است. در این توصیف، ذره سیال پرچمی شکل هنگامی که در صفحه xy حرکت می‌کند در جهت پاد ساعتگرد می‌چرخد؛ راستای گردابی آن مطابق شکل در جهت مثبت z است.

در مختصات کارتزین، (x, y, z) ، $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و (u, v, w) معادله ۴-۲۸ را به صورت زیر می‌توان بسط داد:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (۴-۳۰)$$

اگر جریان در صفحه xy دو بعدی باشد، مؤلفه z سرعت (w) صفر است و u و v نیز با z تغییر نمی‌کنند. بنابراین، دو جز اول معادله ۴-۳۰ صفر می‌باشند و گردابی به صورت زیر در می‌آید:

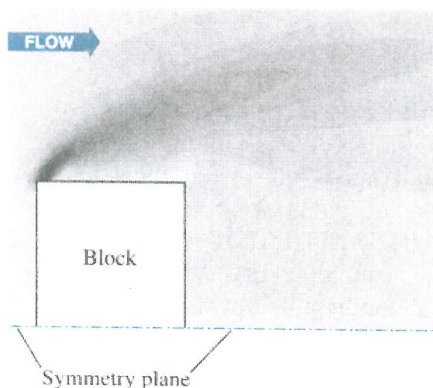
$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (۴-۳۱)$$

گفتنی است که اگر جریان در صفحه xy دو بعدی باشد، بردار گردابی باید به سمت z یا در راستای z باشد (شکل ۴-۴۵).

مثال ۴-۷ کانتورهای گردابی در جریان دو بعدی

مطابق شکل ۴-۳۲ و ۴-۳۳ نتایج حل عددی جریان آزادی را که به یک بلوک با سطح مقطع مستطیلی برخورد می‌کند در نظر بگیرید. کانتورهای گردابی را رسم کرده و در مورد آنها بحث کنید.

حل: هدف محاسبه میدان گردابی برای میدان سرعت داده شده است، که این میدان سرعت از طریق محاسبات عددی به دست آمده و سپس منحنی کانتوری گردابی ایجاد می‌شود.



شکل ۴-۴۶ ترسیم کانتورهای میدان گردابی z که ناشی از جریان برخوردی به یک بلوک است، که به وسیله محاسبات CFD به دست آمده است و به علت تقارن فقط نیمه بالایی آن نشان داده شده است. نواحی تیره بیانگر نواحی گردابی منفی بزرگ و نواحی روشن بیانگر نواحی گردابی مثبت بزرگ هستند.

تحلیل: چون جریان دو بعدی است، تنها مؤلفه غیر صفر گردابی در شکل ۴-۳۲ و ۴-۳۳ عمود بر صفحه و در جهت z است. برای این میدان جریان رسم کانتورهای مؤلفه z گردابی در شکل ۴-۴۶ نشان داده شده است. ناحیه تاریک در نزدیک گوشه سمت چپ-بالای بلوک نشان دهنده مقادیر منفی بزرگ برای گردابی است که این مقادیر، چرخش ساعتگرد ذرات سیال در این ناحیه را نشان می‌دهند. این امر به دلیل گرادیان‌های سرعت بزرگی است که در این ناحیه از میدان جریان وجود دارد. لایه مرزی در گوشه جسم از دیوار جدا شده و در امتداد آن، لایه برشی نازکی را تشکیل می‌دهد که سرعت سریعاً تغییر می‌کند. با انتشار گردابی به سمت پایین دست تمرکز گردابی در لایه برشی تقلیل می‌یابد. ناحیه کوچک روشن هاشور خورده در نزدیکی بالای گوشه راست بلوک نشان‌دهنده ناحیه گردابی مثبت است (چرخش پادساعتگرد) و به خاطر جدایی جریان الگوی جریان ثانویه‌ای ایجاد می‌شود.

بحث: انتظار داریم که مقدار گردابی در نواحی که مشتقات مکانی سرعت بزرگ هستند بالاترین مقدار باشد (معادله ۴-۳۰ را ببینید). با یک آزمون دقیق آشکار می‌شود که ناحیه تاریک در شکل ۴-۴۶ در واقع با گرادیان‌های سرعت بالا در شکل ۴-۳۲ مرتبط است. گفتنی است که میدان گردابی شکل ۴-۶۴ نسبت به زمان متوسط‌گیری شده است. در واقع میدان جریان لحظه‌ای، مغشوش و غیر دائم است و گردابه‌ها از یک جسم گرد ریزش کرده‌اند.

مثال ۴-۸ تعیین چرخش در جریان دو بعدی

میدان سرعت دو بعدی، تراکم ناپذیر و دائمی را در نظر بگیرید:

$$\vec{V} = (u, v) = x^2 \vec{i} + (-2xy - 1) \vec{j} \quad (1)$$

آیا جریان چرخشی است یا غیر چرخشی؟ تعدادی از خطوط جریان را در اولین ربع میدان رسم کرده و در مورد آنها بحث کنید.

تحلیل: چون جریان دو بعدی است، معادله ۴-۳۱ معتبر است. بنابراین:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = (-2y - 0) \vec{k} = -2y \vec{k} \quad (2)$$

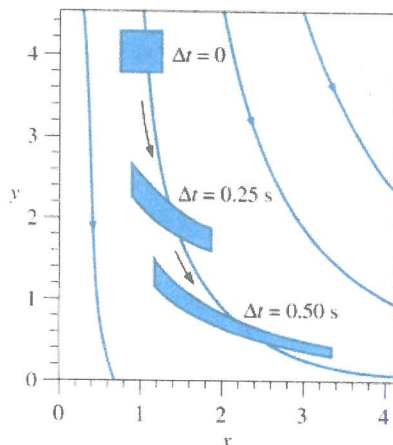
چون گردابی صفر است، جریان چرخشی است. در شکل ۴-۴۷ تعدادی از خطوط جریان در اولین ربع مختصات رسم شده و می بینیم که سیال به سمت پایین و راست حرکت می کند. جابه جایی و تغییر شکل بخشی از سیال نیز نشان داده شده است: در $\Delta t = 0$ تکه سیال مربعی است، در $\Delta t = 0.25$ این تکه حرکت کرده و تغییر شکل داده است، در $\Delta t = 0.50$ سیال حرکت بیشتری کرده و به مقدار بیشتری تغییر شکل داده است. مخصوصاً گوشه راست بالایی المان سیال در مقایسه با گوشه سمت چپ سریع تر جابه جا شده و به سمت راست و پایین حرکت کرده و باعث کشیده شدن تکه سیال در جهت x و جمع شدن آن در جهت عمودی می شود. واضح است که این تکه از سیال دارای چرخش خالص ساعتگرد است که با نتیجه معادله (۲) در تطابق است.

بحث: با توجه به معادله ۴-۲۹، ذرات مجزای سیال با سرعت زاویه ای $\vec{\omega} = -y \vec{k}$ می چرخند که نصف بردار گردابی است. چون $\vec{\omega}$ ثابت نیست، این جریان دارای چرخش یکپارچه نمی باشد. به علاوه $\vec{\omega}$ تابعی خطی از y است. بررسی بیشتر نشان می دهد که این جریان تراکم ناپذیر است و مساحت های هاشور خورده در شکل ۴-۴۷ که نشان دهنده تکه سیال می باشند در تمام سه زمان ثابت باقی می مانند.

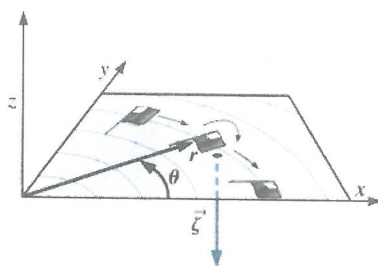
در مختصات استوانه ای، (r, θ, z) ، $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ و (u_r, u_θ, u_z) معادله ۴-۲۸ را به صورت زیر می توان بسط داد:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \quad (32-4)$$

برای جریان دو بعدی در صفحه r, θ معادله ۴-۳۲ به صورت زیر در می آید:



شکل ۴-۴۷ تغییر شکل یک تکه سیال مربعی شکل که برای یک دوره زمانی $0.25s$ و $0.50s$ در معرض میدان سرعت مثال ۴-۸ قرار گرفته است. هم چنین تعدادی از خطوط جریان در ربع اول رسم شده‌اند. مشخص است که این جریان چرخشی است.



شکل ۴-۴۸ برای جریان دوبعدی در صفحه $r\theta$ بردار گردابی همیشه در جهت z (یا $-z$) است در این توصیف، ذره سیال پرچمی گونه در حین حرکت در صفحه $r\theta$ در جهت ساعتگرد می‌چرخد و مطابق شکل جهت گردابی آن در جهت z می‌باشد.

جریان دو بعدی در مختصات استوانه‌ای:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \vec{k} \quad (4-33)$$

که از $\vec{k}$ به عنوان بردار یکه در جهت z به جای $\vec{e}_z$ استفاده شده است. توجه کنید که اگر جریان در صفحه دو بعدی باشد بردار گردابی باید به سمت z یا در راستای محور z باشد (شکل ۴-۴۸).

مقایسه دو جریان دایروی

تمام جریان‌هایی که دارای خطوط جریان دایروی هستند، چرخشی نیستند. برای تشریح این موضوع، دو جریان تراکم‌ناپذیر، دائم و دو بعدی را در نظر بگیرید که هر دوی آنها دارای خطوط جریان دایروی در صفحه $r\theta$ هستند:

$$(۳۴-۴) \quad \text{جریان الف - چرخشی یکپارچه} \quad u_\theta = \omega r \quad \text{و} \quad u_r = 0$$

$$(۳۵-۴) \quad \text{جریان ب - گردابه خطی} \quad u_\theta = \frac{K}{r} \quad \text{و} \quad u_r = 0$$

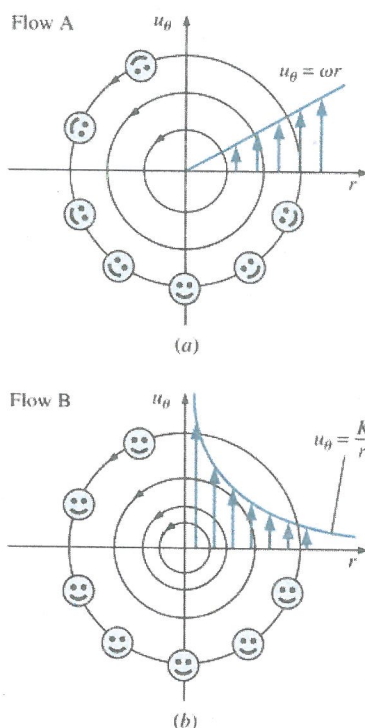
که ω و K ثابت هستند. (خوانندگان هوشیار مطلع هستند که، u_θ در معادله ۳۵-۴ در $r=0$ نامحدود است که چنین چیزی از نظر فیزیکی غیر ممکن است. برای پرهیز از این مسأله از ناحیه نزدیک به مبدأ صرف‌نظر می‌کنیم) چون در هر دو حالت مؤلفه‌های شعاعی سرعت صفر هستند، خطوط جریان حول مبدأ به شکل دایره می‌باشند. برای دو جریان پروفیل‌های سرعت همراه با خطوط جریان آنها در شکل ۴۹-۴ رسم شده‌اند. حال با استفاده از معادله ۳۳-۴ برای هر کدام از این جریان‌ها میدان گردابی را محاسبه و مقایسه می‌کنیم:

$$(۳۶-۴) \quad \text{جریان الف - چرخش یکپارچه} \quad \vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - 0 \right) \vec{k} = 2\omega \vec{k}$$

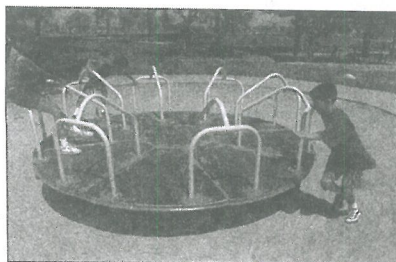
$$(۳۷-۴) \quad \text{جریان ب - گردابه خطی} \quad \vec{\zeta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(K)}{\partial r} - 0 \right) \vec{k} = 0$$

چیز عجیبی نیست که برای حالت با چرخش یکپارچه، گردابی مخالف صفر است. در واقع مقدار گردابی ثابت بوده و اندازه آن دو برابر سرعت زاویه‌ای است و هم جهت با آن می‌باشد. (این امر با معادله ۲۹-۴ مطابقت دارد) جریان الف چرخشی است از لحاظ فیزیکی این بدان معناست که ذرات مجزای سیال هنگام گردش حول مبدأ می‌چرخند (شکل ۴۹-۴ الف). از طرفی، در جریان گردابی با گردابه خطی مقدار گردابی در همه جا برابر با صفر است (به غیر از مبدأ که یک نقطه منفرد ریاضی است). جریان ب غیر چرخشی است. از نظر فیزیکی، ذرات سیال به هنگام گردش در دایره‌های حول مبدأ نمی‌چرخند (شکل ۴۹-۴ ب).

تشابه ساده‌ای میان جریان الف و یک چرختاب و جریان ب و یک چرخ و فلک (شکل ۵۰-۴) وجود دارد. هنگامی که بچه‌ها حول یک چرختاب گردش می‌کنند با همان سرعت زاویه‌ای که چرختاب می‌چرخد، شروع به چرخش می‌کنند. این مشابه با یک جریان چرخشی است. از طرفی بچه‌هایی که سوار یک چرخ و فلک هستند در هنگام حرکت روی مسیر دایروی همیشه در یک موقعیت رو به بالا قرار می‌گیرند که این امر مشابه با یک جریان غیر چرخشی است.



شکل ۴-۴۹ خطوط جریان و پروفیل‌های سرعت برای (الف) جریان ال، چرخش صلب گونه و (ب) جریان ب، یک گردابه خطی. در همه جا به جز مبدأ جریان الف چرخشی و جریان ب غیر چرخشی است.



(a)



(b)

شکل ۴-۵۰ یک تشابه ساده: (الف) جریان دایروی چرخشی مشابه با یک چرختاب است در حالی که (ب) جریان دایروی غیر چرخشی مشابه با یک چرخ و فلک است.

مثال ۴-۹ تعیین چرخشی بودن یک چاه خطی

میدان سرعت دو بعدی ساده‌ای که چاه خطی نامیده می‌شود اغلب برای شبیه‌سازی سیالی که در امتداد یک خط در طول محور z مکیده می‌شود به کار می‌رود. فرض کنید که دبی حجمی بر واحد طول در امتداد محور z ، $\dot{V}/L$ ، معلوم باشد که $\dot{V}$ یک کمیت منفی است. در دو بعد و در صفحه $r\theta$ ، داریم،

$$u_r = \frac{\dot{V}}{2\pi L} \frac{1}{r} \quad \text{و} \quad u_\theta = 0 \quad (1)$$

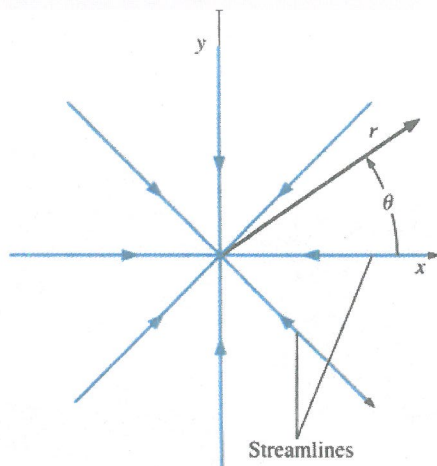
تعدادی از خطوط جریان را رسم کنید و گردابی را محاسبه کنید. جریان چرخشی است یا غیر چرخشی؟

حل: برای میدان جریان داده شده خطوط جریان رسم شده و چرخشی بودن جریان باید تعیین شود.

تحلیل: چون فقط مؤلفه شعاعی سرعت وجود داشته و جریان مؤلفه مماسی ندارد، سریعاً نتیجه می‌گیریم که کلیه خطوط جریان به صورت پرتوهایی به سمت مبدأ هستند. تعدادی از خطوط جریان در شکل ۴-۵۱ رسم شده‌اند. گردابی با استفاده از معادله ۴-۳۳ محاسبه می‌شود:

$$\zeta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta} u_r \right) \vec{k} = \frac{1}{r} \left(0 - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\dot{V}}{2\pi L} \frac{1}{r} \right) \right) \vec{k} = 0 \quad (2)$$

چون بردار گردابی همه جا صفر است، این میدان جریان غیر چرخشی است.

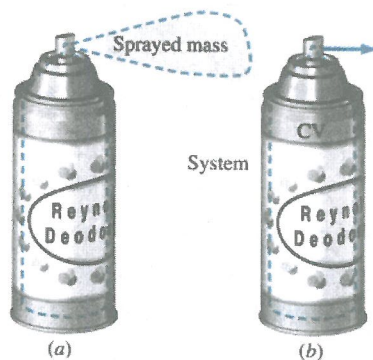


شکل ۴-۵۱ خطوط جریان در صفحه $r\theta$ برای یک چاه خطی.

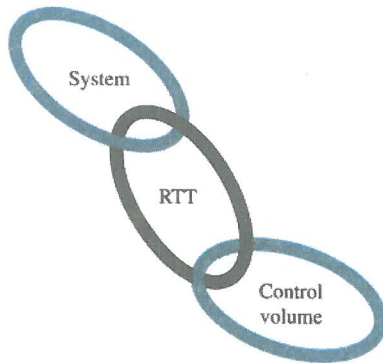
بحث: بسیاری از میدان‌های جریان عملی از قبیل ورودی‌ها و دودکش‌ها که دارای مکش هستند را می‌توان با فرض غیر چرخشی، دقیقاً تقریب زد (هنیسون و سیمبالا ۲۰۰۳).

۴-۵ تئوری انتقال رینولدز

در ترمودینامیک و مکانیک جامدات اغلب با سیستم سر و کار داریم (که غالباً سیستم بسته نامیده می‌شوند)، که شامل مقداری ماده با هویت ثابت است. در دینامیک سیالات معمولاً با حجم معیار سر و کار داریم (که غالباً سیستم باز نامیده می‌شود) که ناحیه‌ای از فضا است که برای مطالعه انتخاب می‌شود. در طول یک فرایند اندازه و شکل سیستم ممکن است تغییر کند اما جرمی از مرزهای آن عبور نمی‌کند. از طرف دیگر در یک حجم معیار، جرم از مرزهای آن وارد یا خارج می‌شود که به این مرزها سطح معیار گفته می‌شود. هم‌چنین در طول یک فرایند، ممکن است حجم معیار حرکت کرده و تغییر شکل دهد، اما در بسیاری از کاربردهای واقعی، حجم معیارها ثابت و تغییر شکل ناپذیر هستند. در شکل ۴-۵ کاربرد سیستم و حجم معیار را برای حالتی که عطر از یک ظرف اسپری به بیرون پاشیده می‌شود نشان داده شده است. در هنگام تحلیل فرایند پاشش، به دو صورت می‌توان عمل کرد، یا سیال متحرک و تغییر شکل‌پذیر است (یک سیستم) و یا یک حجمی در نظر گرفته شده که توسط سطوح داخلی قوطی محاط شده است (یک حجم معیار). چون عطر در حال پاشش است هر دو انتخاب یکی است. هنگامی که بخشی از محتوی قوطی تخلیه شده باشد، روش سیستمی بخشی از جرم را که



شکل ۴-۵ در روش تحلیل پاشیدن عطر از یک ظرف اسپری: (الف) سیال را هنگامی که حرکت می‌کند و تغییر شکل می‌دهد دنبال می‌کنیم. این دیدگاه سیستمی است، هیچ جرمی مرز را قطع نمی‌کند و کل جرم سیستم ثابت باقی می‌ماند، (ب) یک حجم ثابت از قوطی را مورد توجه قرار می‌دهیم. این دیدگاه حجم معیاری است و جرم مرز را قطع می‌کند.

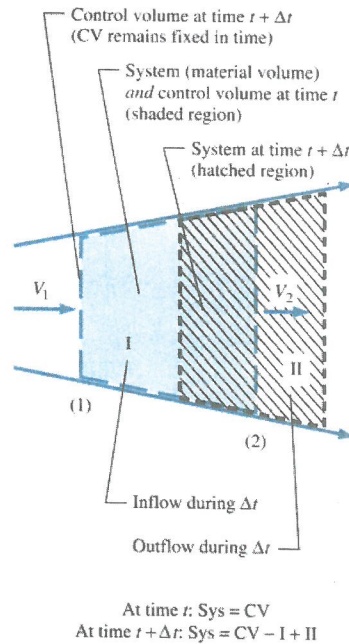


شکل ۴-۵۳ تئوری انتقال رینولدز (RTT) یک ارتباط میان دیدگاه سیستمی و دیدگاه حجم معیاری ایجاد می‌کند.

خارج شده به عنوان قسمتی از سیستم تعقیب می‌نماید (که کاری مشکل است) و بنابراین جرم سیستم ثابت باقی می‌ماند. از نقطه نظر مفهومی، این کار معادل با اتصال یک بالون خالی به نازل قوطی و پر کردن بالون با گاز خروجی است. اکنون سطوح داخلی بالون بخشی از مرز سیستم هستند. در هر حال در دیدگاه حجم معیار، با موادی که از قوطی خارج می‌شوند کاری نداریم (به جز خواص سیال در خروجی) و بنابراین جرم درون حجم معیار در طی فرایند کاهش می‌یابد، در حالی که حجم آن همواره ثابت است. بنابراین دیدگاه سیستمی، فرایند پاشش را به عنوان انبساط حجم سیستم در نظر می‌گیرد، در حالی که دیدگاه حجم معیاری آن را به عنوان تخلیه سیال از سطوح معیار یک حجم معیار ثابت نگاه می‌کند.

اغلب اصول مکانیک سیالات از مکانیک جامدات گرفته شده‌اند، که در آن قوانین فیزیکی با نرخ‌های زمانی تغییر خواص گسترده برای سیستم‌ها بیان شده‌اند. در مکانیک سیالات بهتر است که با حجم معیارها کار کنیم و بنابراین لازم است که تغییرات در حجم معیار را به تغییرات در سیستم مرتبط کنیم. ارتباط میان نرخ تغییرات زمانی یک خاصیت گسترده در سیستم و حجم معیار توسط تئوری انتقال رینولدز (RTT) بیان می‌شود که ارتباطی میان دیدگاه سیستمی و حجم معیاری است (شکل ۴-۵۳). این قضیه به افتخار مهندس انگلیسی، ازبرن رینولدز (۱۸۴۲-۱۹۱۲) که تلاش‌های زیادی نمود تا این مسأله را در مکانیک سیالات توسعه دهد، RTT نامیده می‌شود.

شکل عمومی تئوری انتقال رینولدز را می‌توان برای سیستمی با شکل و ارتباط‌های دلخواه به دست آورد، ولی استخراج روابط قدری زمان بر است. برای کمک به درک مفاهیم اصلی این



شکل ۴-۵ یک سیستم در حال حرکت و یک حجم معیار ثابت (ناحیه هاشور خورده) در مقطع واگرای یک میدان جریان در زمان‌های t و $t + \Delta t$. مرزهای بالایی و پایینی خطوط جریان هستند.

تئوری ابتدا آن را از یک روش مستقیم با استفاده از یک هندسه ساده استخراج کرده و سپس نتایج را عمومیت می‌دهیم.

مطابق شکل ۴-۵ جریانی را در نظر بگیرید که در قسمت واگرای (منبسط شونده) میدان جریان از چپ به راست در جریان است. مرزهای بالایی و پایینی سیال مورد نظر خطوط جریان هستند و بین این دو مرز، جریان در هر سطح مقطعی را یکنواخت فرض می‌کنیم. برای میدان جریان، حجم معیار را میان مقاطع (۱) و (۲) ثابت فرض می‌کنیم. مقاطع (۱) و (۲) هر دو عمود بر جهت جریان هستند. در زمان شروع t ، سیستم و حجم معیار بر هم منطبق هستند. بنابراین سیستم و حجم معیار یکی می‌باشند (ناحیه سایه‌دار در شکل ۴-۵). در طی بازه زمانی Δt ، سیستم با سرعت یکنواخت V_1 در مقطع (۱) و V_2 در مقطع (۲) در جهت جریان حرکت می‌کند. در زمان بعدی سیستم توسط ناحیه هاشور خورده مشخص شده است. ناحیه‌ای که در طی این حرکت جزو سیستم نیست با شماره ۱ مشخص می‌شود (بخشی از حجم معیار CV) و ناحیه جدیدی که جزئی از سیستم می‌شود با شماره II نشان داده می‌شود (که بخشی از CV نیست). بنابراین در زمان $t + \Delta t$ سیستم شامل همان سیال است ولی در این

حالت ناحیه $CV-I+II$ را اشغال می‌کند. حجم معیار در فضا ثابت است و بنابراین در تمام زمان‌ها همه ناحیه سایه‌دار مشخص شده برابر با CV می‌باشد.

B را به عنوان یک خاصیت گسترده (مانند جرم، انرژی و مومنتوم) فرض کنید و $b = B/m$ را برابر خاصیت متمرکز مربوطه قرار می‌دهیم. با توجه به این‌که خواص گسترده جمع‌پذیر هستند می‌توان خاصیت گسترده سیستم در زمان‌های t و $t+\Delta t$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$B_{sys,t} = B_{CV,t} \quad (\text{سیستم و حجم معیار در زمان } t \text{ برهم منطبق هستند})$$

$$B_{sys,t+\Delta t} = B_{CV,t+\Delta t} - B_{I,t+\Delta t} + B_{II,t+\Delta t}$$

با کسر معادله اول از معادله دوم و تقسیم آن بر Δt خواهیم داشت:

$$\frac{B_{sys,t+\Delta t} - B_{sys,t}}{\Delta t} = \frac{B_{CV,t+\Delta t} - B_{CV,t}}{\Delta t} - \frac{B_{I,t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{B_{II,t+\Delta t}}{\Delta t}$$

با گرفتن حد وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ و استفاده از تعریف مشتق، خواهیم داشت:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{CV}}{dt} - \dot{B}_{in} + \dot{B}_{out} \quad (۳۸-۴)$$

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{CV}}{dt} - b_1 \rho_1 V_1 A_1 + b_2 \rho_2 V_2 A_2 \quad \text{یا}$$

چون

$$B_{I,t+\Delta t} = b_1 m_{I,t+\Delta t} = b_1 \rho_1 V_{I,t+\Delta t} = b_1 \rho_1 V_1 \Delta t A_1$$

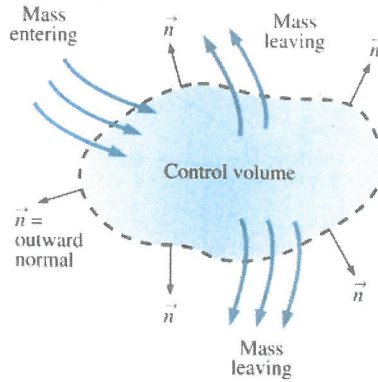
$$B_{II,t+\Delta t} = b_2 m_{II,t+\Delta t} = b_2 \rho_2 V_{II,t+\Delta t} = b_2 \rho_2 V_2 \Delta t A_2$$

و

$$\dot{B}_{in} = \dot{B}_I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{I,t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b_1 \rho_1 V_1 \Delta t A_1}{\Delta t} = b_1 \rho_1 V_1 A_1$$

$$\dot{B}_{out} = \dot{B}_{II} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{II,t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b_2 \rho_2 V_2 \Delta t A_2}{\Delta t} = b_2 \rho_2 V_2 A_2$$

که A_1 و A_2 مساحت سطح مقطع‌ها در موقعیت‌های (۱) و (۲) هستند. معادله ۳۸-۴ بیان می‌کند که نرخ زمانی تغییر خاصیت B در سیستم برابر با نرخ زمانی تغییر B در حجم معیار به اضافه شار خالص B خروجی از حجم معیار است که توسط جرم عبوری از سطح معیار حمل شده است. چون این رابطه تغییر خاصیت از یک سیستم را به تغییر خاصیت در حجم معیار مرتبط می‌کند، همان رابطه مطلوبی است که به دنبال آن بودیم. گفتنی است که معادله



$$\dot{B}_{net} = \dot{B}_{out} - \dot{B}_{in} = \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

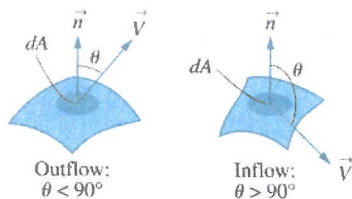
شکل ۴-۵۵ انتگرال $\rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ روی سطح معیار مقدار خالص خاصیت B خروجی از حجم معیار بر واحد حجم معیار بر واحد زمان است (اگر منفی باشد به داخل حجم معیار می‌رود).

۴-۳۸ در هر لحظه‌ای از زمان قابل استفاده است، در حالی که فرض می‌شود که سیستم و حجم معیار در آن لحظه مشخص از زمان حجم یکسانی را اشغال کرده‌اند.

در این حالت فقط یک ورودی و یک خروجی وجود دارد و سرعت‌ها در مقاطع (۱) و (۲) بر سطوح عمود هستند. شار ورودی $\dot{B}_{in}$ و شار خروجی $\dot{B}_{out}$ که به خاصیت B مربوط می‌شوند به آسانی قابل تعیین هستند. در حالت کلی ممکن است که چندین ورودی و خروجی داشته باشیم و امکان دارد که سرعت‌ها عمود بر مقاطع نباشند. هم‌چنین ممکن است که سرعت‌ها یکنواخت هم نباشند. برای تعمیم این فرایند، بر روی سطح معیار مساحت دیفرانسیلی dA را در نظر می‌گیریم و بردار یکه عمود بر سطح را با $\vec{n}$ نشان می‌دهیم. شار خاصیت b عبوری از dA با $\rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ برابر است که ضرب داخلی $\vec{V} \cdot \vec{n}$ مؤلفه عمودی سرعت را نشان می‌دهد بنابراین نرخ خالص جریان خروجی از کل سطح معیار با انتگرال‌گیری تعیین می‌شود (شکل ۴-۵۵).

$$\dot{B}_{net} = \dot{B}_{out} - \dot{B}_{in} = \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (۴-۳۹)$$

همان‌طور که بعداً توضیح داده خواهد شد یکی از ویژگی‌های مهم این رابطه این است که به طور خودکار جریان ورودی را از جریان خروجی کم می‌کند. مطابق شکل ۴-۵۶ حاصل ضرب نقطه‌ای بردار سرعت در یک نقطه روی سطح معیار و جهت عمودی در آن نقطه



$$\vec{V} \cdot \vec{n} = |\vec{V}| |\vec{n}| \cos \theta = V \cos \theta$$

If $\theta < 90^\circ$, then $\cos \theta > 0$ (outflow).
 If $\theta > 90^\circ$, then $\cos \theta < 0$ (inflow).
 If $\theta = 90^\circ$, then $\cos \theta = 0$ (no flow).

شکل ۴-۵۶ جریان خروجی و جریان ورودی جرم از مساحت دیفرانسیلی یک سطح معیار.

می‌باشد. برای $\theta < 90^\circ$ ، $\cos \theta > 0$ است و بنابراین برای جریانی که جرم از حجم معیار خارج می‌شود $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$ است و برای $\theta > 90^\circ$ ، $\cos \theta < 0$ و بنابراین برای جریان ورودی به حجم معیار $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$ است. پس، کمیت دیفرانسیلی $\rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ برای جریان خروجی از حجم معیار مثبت و برای جریان ورودی به حجم معیار منفی است و انتگرال آن روی کل سطح معیار نرخ خالص خاصیت B خروجی از حجم معیار را می‌دهد.

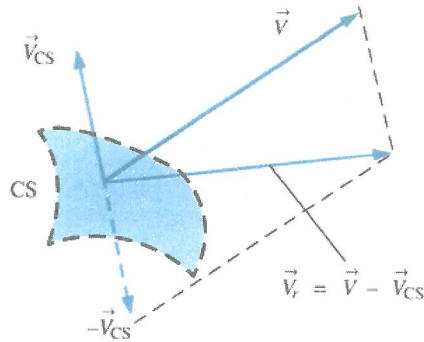
در حالت کلی ممکن است که خواص داخل حجم معیار تابع مکان باشند. در چنین حالتی مقدار کل خاصیت B در داخل حجم معیار باید با انتگرال‌گیری به صورت زیر به دست آید:

$$B_{CV} = \int_{CV} \rho b dV \quad (4-40)$$

بنابراین عبارت dB_{CV} / dt در معادله ۴-۳۸ با $\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV$ برابر است و بیانگر نرخ زمانی تغییر مقدار خاصیت B در حجم معیار است. مقدار مثبت dB_{CV} / dt نشان‌دهنده افزایش مقدار B بوده و مقدار منفی نشان‌دهنده کاهش آن است. با جایگذاری معادلات ۴-۳۹ و ۴-۴۰ در معادله ۴-۳۸ تئوری انتقال رینولدز را به دست می‌آوریم که تحت عنوان انتقال سیستم به حجم معیار برای یک حجم معیار ثابت نیز شناخته می‌شود،

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (4-41)$$

چون حجم معیار نسبت به زمان حرکت نکرده و تغییر شکل نمی‌دهد و قلمرو انتگرال‌گیری نیز با زمان تغییر نمی‌کند در سمت راست، عبارت مشتق زمانی را می‌توان به داخل انتگرال آورد. (به عبارت دیگر، این که ابتدا مشتق بگیریم یا انتگرال‌گیری کنیم فرقی ندارد) اما چون چگالی و



شکل ۴-۵۷ سرعت نسبی سیال گذرنده از سطح معیار با جمع برداری سرعت مطلق سیال و منفی سرعت موضعی سطح معیار به دست می آید.

کمیت b در داخل حجم معیار ممکن است که نسبت به مکان تغییر کنند، باید مشتق زمانی را در این حالت با مشتق جزئی $(\partial/\partial t)$ جایگزین کرد. بنابراین شکل دیگر معادله انتقال رینولدز برای یک حجم معیار ثابت به صورت زیر است:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) d\forall + \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (۴-۴۲)$$

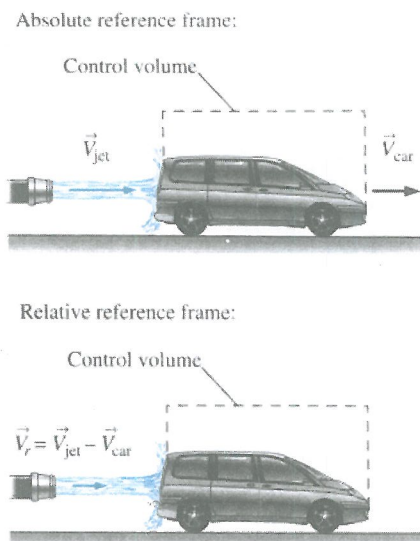
معادله (۴-۴۱) برای یک حجم معیار ثابت به دست آمد. با این وجود، بسیاری از سیستم‌های کاربردی از قبیل توربین‌ها و پروانه‌ها دارای حجم معیارهای متغیر هستند. خوشبختانه اگر سرعت مطلق سیال $\vec{V}$ در جمله آخر را با سرعت نسبی $\vec{V}_r$ جایگزین کنیم، معادله ۴-۴۱ برای حجم معیارهای در حال حرکت و/یا در حال تغییر شکل نیز معتبر خواهد بود،

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{CS} \quad (۴-۴۳)$$

که $\vec{V}_{CS}$ سرعت موضعی سطح معیار می‌باشد (شکل ۴-۵۷). بنابراین شکل عام تئوری انتقال رینولدز به صورت زیر است:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b d\forall + \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA \quad (۴-۴۴)$$

گفتنی است که در حجم معیاری که با زمان در حال حرکت یا تغییر شکل است طبق معادله ۴-۴۴ باید مشتق زمانی را بعد از انتگرال‌گیری اعمال کرد. به عنوان مثالی ساده



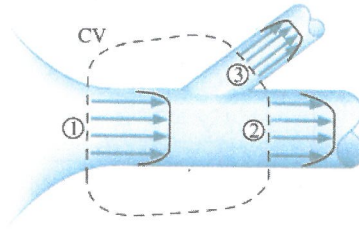
شکل ۴-۵۸ تئوری انتقال رینولدز به یک حجم معیار در حال حرکت با سرعت ثابت اعمال شده است.

از یک حجم معیار متحرک یک ماشین اسباب بازی را در نظر بگیرید که با سرعت ثابت $\vec{V}_{car} = 10 \text{ km/h}$ به سمت راست حرکت می‌کند. جت آبی با سرعت بالا (سرعت مطلق $\vec{V}_{car} = 25 \text{ km/h}$ به سمت راست) به عقب ماشین برخورد کرده و آن را به جلو می‌راند (شکل ۴-۵۸). اگر حجم معیاری حول ماشین رسم کنیم، سرعت نسبی $\vec{V}_r = 25 - 10 = 15 \text{ Km/h}$ به سمت راست می‌باشد. این سرعت بیانگر سرعتی است که ناظر سوار بر حجم معیار مشاهده خواهد کرد. به عبارت دیگر $\vec{V}_r$ سرعت سیالی است که نسبت به سیستم مختصات متحرک با حجم معیار بیان می‌شود.

سرانجام با اعمال تئوری لایب نیتز می‌توان نشان داد که تئوری انتقال رینولدز برای حجم معیار متحرک یا/و در حال تغییر شکل، معادل با شکل داده شده توسط معادله ۴-۴۲ است که در زیر تکرار می‌شود:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA \quad (4-45)$$

بر خلاف معادله ۴-۴۴، بردار سرعت $\vec{V}$ در معادله ۴-۴۵ برای استفاده در یک حجم معیار متغیر باید به عنوان سرعت مطلق (از دیدگاه یک مختصات ساکن) در نظر گرفته شود. در



شکل ۴-۵۹ مثالی از حجم معیاری که در آن یک مقطع ورودی (۱) و دو مقطع خروجی (۲ و ۳) تعریف شده است. در چنین حالتی انتگرال سطح معیار در RTT را می‌توان به صورت مناسب‌تر برحسب مقادیر متوسط خواص سیال گذرنده از هر مقطع ورودی و خروجی نوشت.

جریان دائم، مقدار خاصیت B در داخل حجم معیار نسبت به زمان ثابت می‌ماند و بنابراین مشتق زمانی در معادله ۴-۴۴ صفر می‌شود. بنابراین تئوری انتقال رینولدز به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA \quad (۴-۴۶)$$

توجه کنید که بر خلاف حجم معیار، مقدار خاصیت B در یک سیستم در طی یک فرایند دائم ممکن است که نسبت به زمان تغییر کند. اما در این حالت تغییر خاصیت باید با مقدار خالص خاصیت منتقل شده توسط جرم از حجم معیار برابر باشد (یک جابه‌جایی و نه یک اثر غیر دائم).

در اغلب کاربردهای عملی RTT سیال در تعدادی ورودی و خروجی مشخص مرزهای حجم معیار را قطع می‌کند (شکل ۴-۵۹). در چنین حالاتی معمولاً سطح معیار را در مقاطع ورودی و خروجی قطع کرده و انتگرال سطحی در معادله ۴-۴۴ را با عبارت‌های جبری تقریبی در ورودی‌ها و خروجی‌ها با استفاده از مقادیر متوسط خواص سیال گذرنده از آن مقاطع جایگزین می‌کنیم. ما مقادیر ρ_{avg} و b_{avg} را به عنوان مقادیر متوسط ρ و b و عبوری از سطح مقطع A تعریف می‌کنیم، یعنی $b_{avg} = (1/A) \int_A b dA$. هنگامی که انتگرال‌های سطحی در RTT (معادله ۴-۴۴) روی یک سطح مقطع A ورودی یا خروجی را محاسبه می‌کنیم، خاصیت b را از انتگرال سطحی خارج کرده و مقدار متوسط آن را جایگزین آن می‌کنیم در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_A \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA \cong b_{avg} \int_A \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA = b_{avg} \dot{m}_r$$

که $\dot{m}_r$ دبی جرمی عبوری از ورودی یا خروجی نسبت به سطح معیار (متحرک) است. اگر خاصیت b روی کل سطح مقطع A یکنواخت باشد تقریب به کار رفته در این معادله دقیق می باشد. بنابراین معادله ۴-۴۴ به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV + \underbrace{\sum_{out} \dot{m}_r b_{avg}}_{\text{برای هر خروجی}} - \underbrace{\sum_{out} \dot{m}_r b_{avg}}_{\text{برای هر ورودی}} \quad (۴۷-۴)$$

در بعضی کاربردها، می خواهیم که معادله ۴-۴۷ را بر حسب دبی های حجمی (به جای جرم) بنویسیم. در چنین حالتی از تقریب $\dot{m}_r \approx \rho_{avg} \dot{V}_r = \rho_{avg} V_{r,avg} A$ استفاده می شود. این تقریب در صورتی دقیق است که چگالی در مقطع A یکنواخت باشد. پس معادله ۴-۴۷ به صورت زیر در می آید:

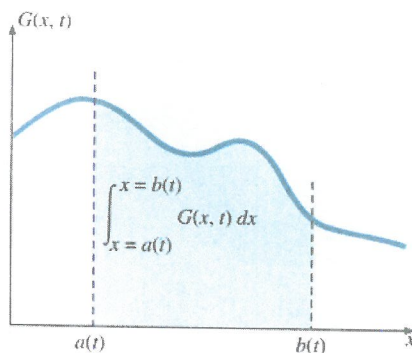
$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV + \underbrace{\sum_{out} \rho_{avg} b_{avg} V_{r,avg} A}_{\text{برای هر خروجی}} - \underbrace{\sum_{in} \rho_{avg} b_{avg} V_{r,avg} A}_{\text{برای هر ورودی}} \quad (۴۸-۴)$$

گفتنی است که چنین تقریب هایی به صورت عمده ای تحلیل را ساده می کنند، اما این تقریب ها همیشه صحیح نیستند، خصوصاً در حالت هایی که توزیع سرعت در ورودی یا خروجی خیلی یکنواخت نباشد (مثلاً جریان های داخل لوله، شکل ۴-۵۹). در ضمن، هنگامی که خاصیت b شامل یک جمله سرعت باشد، انتگرال روی سطح معیار معادله ۴-۴۵ غیر خطی می شود و تقریب معادله ۴-۴۸ منجر به خطاهایی می شود. خوشبختانه با به کارگیری ضریب تصحیحی در معادله ۴-۴۸ که در فصول ۵ و ۶ راجع به آن بحث می شود، می توان از این خطاها چشم پوشی کرد.

معادلات ۴-۴۷ و ۴-۴۸ برای حجم معیارهای ثابت یا متحرک قابل اعمال است اما همان گونه که قبلاً بحث شد، باید در یک حجم معیار متحرک از سرعت نسبی استفاده کرد، برای مثال در معادله ۴-۴۷، دبی جرمی $\dot{m}_r$ با زیرنویس r نسبت به سطح معیار (متحرک) بیان شده است.

روش دیگر استخراج معادله انتقال رینولدز

روش بسیار سر راست تر استخراج معادله انتقال رینولدز استفاده از تئوری لایب نیتز است (کاندو، ۱۹۹۰ را ببینید). احتمالاً شما با حالت یک بعدی این تئوری آشنا هستید، که در آن می توانید از انتگرالی مشتق گیری کنید که حدود انتگرال توابعی از متغیری هستند که می خواهید از آن مشتق گیری کنید (شکل ۴-۶۰)،



شکل ۴-۶ تئوری لایب نیتز یک بعدی در هنگام محاسبه مشتق زمانی یک انتگرال (نسبت به x) که حدود انتگرال تابعی از زمان هستند مورد نیاز است.

تئوری لایب نیتز یک بعدی:

$$\frac{d}{dt} \int_{x=a(t)}^{x=b(t)} G(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} G(b, t) - \frac{da}{dt} G(a, t) \quad (4-49)$$

تئوری لایب نیتز تغییرات حدود $a(t)$ و $b(t)$ با زمان را همراه با تغییرات غیردائم تابع زیر انتگرال $G(x, t)$ در نظر می‌گیرد.

مثال ۴-۱۰ انتگرال‌گیری لایب نیتز یک بعدی

عبارت زیر را تا حد ممکن ساده کنید:

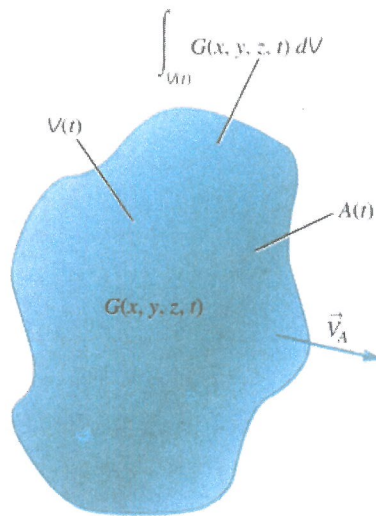
$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_{x=0}^{x=Ct} e^{-x^2} dx \quad (1)$$

حل: هدف محاسبه $F(t)$ با استفاده از عبارت داده شده می‌باشد.

تحلیل: ابتدا می‌توان انتگرال‌گیری کرده و سپس مشتق‌گیری را انجام داد، اما چون معادله (۱) به شکل معادله ۴-۴۹ است از تئوری لایب نیتز یک بعدی استفاده می‌کنیم. در اینجا، $G(x, t) = e^{-x^2}$ (در این مثال ساده G تابعی از زمان نیست) حدود انتگرال‌گیری $a(t) = 0$ و $b(t) = Ct$ می‌باشند. بنابراین:

$$F(t) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t} dx + \underbrace{\frac{db}{dt}}_C \underbrace{G(b, t)}_{e^{-b^2}} - \underbrace{\frac{da}{dt}}_0 G(a, t) \rightarrow F(t) = Ce^{-C^2 t^2} \quad (2)$$

بحث: خوب است که حل مشابهی را بدون استفاده از تئوری لایب نیتز به دست آورید. در حالت سه بعدی، تئوری لایب نیتز برای یک انتگرال حجمی به صورت زیر است:



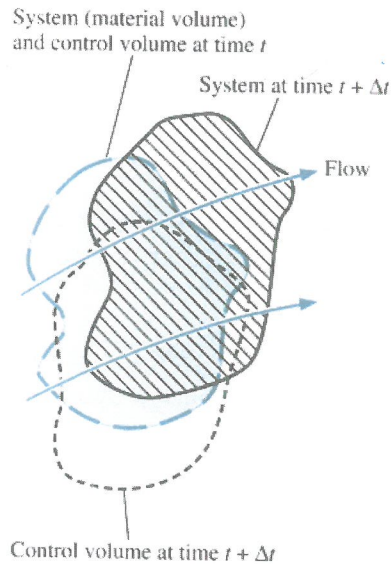
شکل ۴-۶۱ تئوری لایب نیتز سه بعدی در هنگام محاسبه مشتق زمانی یک انتگرال حجمی برای زمانی که حجم نسبت به زمان در حال حرکت و/یا تغییر شکل است مورد نیاز است. می‌توان نشان داد که شکل سه بعدی تئوری لایب نیتز روش دیگری برای به دست آوردن تئوری انتقال رینولدز است.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} G(x, y, z, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_{A(t)} G \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA \quad (۵۰-۴)$$

که $V(t)$ حجم در حال حرکت و/یا تغییر شکل (تابعی از زمان) و $A(t)$ سطح آن (مرز) است و $\vec{V}_A$ هم سرعت مطلق این سطح (متحرک) می‌باشد (شکل ۴-۶۱). معادله ۴-۵۰ برای هر حجم متحرک و یا با تغییر شکل دلخواه در فضا و زمان قابل اعمال می‌باشد. برای سازگاری با تحلیل‌های قبلی، برای جریان سیال تابع زیر انتگرال G را با ρb برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho b dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{A(t)} (\rho b) \vec{V}_A \cdot \vec{n} dA \quad (۵۱-۴)$$

اگر تئوری لایب نیتز را برای حالت خاص یک حجم مادی (یک سیستم با هویت ثابت که با جریان سیال حرکت می‌کند) به کار ببریم، $\vec{V}_A = \vec{V}$ است، چون در هر مکانی سطح مادی با سیال حرکت می‌کند. در اینجا $\vec{V}$ سرعت موضعی سیال است و معادله ۴-۵۱ به صورت زیر در می‌آید:



شکل ۴-۶۲ حجم مادی (سیستم) و حجم معیار در زمان t فضای یکسانی را اشغال می‌کنند (مساحت سایه خورده آبی رنگ)، اما به صورت متفاوت حرکت کرده و تغییر شکل می‌دهند، در یک زمان بعد آنها برهم منطبق نیستند.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho b \, dV = \frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) \, dV + \int_{A(t)} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \quad (۵۲-۴)$$

معادله ۴-۵۲ در هر لحظه از زمان t معتبر است. حجم معیار را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که در زمان t ، حجم معیار و سیستم فضای یکسانی را اشغال کنند، به عبارت دیگر، برهم منطبق می‌باشند. در زمان بعدی $t + \Delta t$ ، سیستم حرکت کرده و به همراه جریان تغییر شکل داده است. اما حرکت و تغییر شکل حجم معیار ممکن است که متفاوت باشد (شکل ۴-۶۲). با این وجود، نکته در این است که در زمان t سیستم (حجم مادی) و حجم معیار یکی هستند. بنابراین، انتگرال حجمی در سمت راست معادله ۴-۵۲، در زمان t را می‌توان روی کل حجم معیار محاسبه کرد و انتگرال سطحی را هم می‌توان در روی سطح معیار در زمان t محاسبه کرد. بنابراین:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) \, dV + \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \quad (۵۳-۴)$$

این عبارت با معادله ۴-۴۵ یکسان بوده و برای هر حجم معیار با شکل دلخواه، در حال حرکت و در حال تغییر شکل در زمان t معتبر است. به یاد داشته باشید که در معادله ۴-۵۳، $\vec{V}$ سرعت مطلق سیال است.

مثال ۴-۱۱ تئوری انتقال رینولدز بر حسب سرعت نسبی

با استفاده از تئوری لایب نیتز و تئوری عام انتقال رینولدز برای یک حجم معیار دلخواه متحرک و در حال تغییر شکل، یعنی معادله ۴-۵۳، ثابت کنید که معادله ۴-۴۴ معتبر است. حل: هدف اثبات معادله ۴-۴۴ است.

تحلیل: حالت سه بعدی کلی تئوری لایب نیتز، معادله ۴-۵۰، برای هر حجمی قابل اعمال است. این معادله را به حجم معیار مورد نظر اعمال می‌کنیم که حرکت و تغییر شکل این حجم معیار هم با حرکت و تغییر شکل حجم مادی می‌تواند متفاوت باشد (شکل ۴-۶۲). با جایگذاری ρb به جای G در ۴-۵۰ داریم:

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV + \int_{CS} \rho b \vec{V}_{CS} \cdot \vec{n} dA \quad (1)$$

اینک معادله ۴-۵۳ را برای حجم معیار حل می‌کنیم،

$$\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dV = \frac{dB_{sys}}{dt} - \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2)$$

با جایگذاری معادله ۲ در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV = \frac{dB_{sys}}{dt} - \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA + \int_{CS} \rho b \vec{V}_{CS} \cdot \vec{n} dA \quad (3)$$

با ترکیب دو جمله آخر و بازآرایی داریم:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b (\vec{V} - \vec{V}_{CS}) \cdot \vec{n} dA \quad (4)$$

یادآور می‌شویم که سرعت نسبی بر طبق معادله ۴-۴۳ تعریف می‌شود، بنابراین:

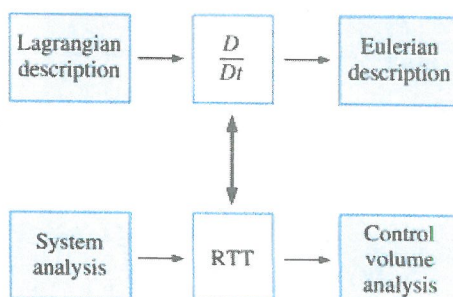
$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA \quad (5)$$

بحث: در واقع معادله (۵) با معادله ۴-۴۴ یکی است و بنابراین قدرت و توانمندی تئوری لایب نیتز نشان داده شد.

ارتباط بین مشتق مادی و RTT

شاید متوجه یکسانی و تشابه بین مشتق مادی مورد بحث در بخش ۴-۱ و تئوری انتقال رینولدز که در اینجا بحث شد، شده باشید. در واقع، هر دو تحلیل، بیانگر روش‌هایی برای تبدیل از مفاهیم لاگرانژی به تفاسیر اویلری این مفاهیم هستند. با این‌که تئوری انتقال رینولدز با حجم معیارهای با اندازه معین سروکار دارد و مشتق مادی به ذرات سیال بسیار کوچک می‌پردازد، تفاسیر فیزیکی پایه‌ای یکسانی در هر دو مورد به کار می‌رود (شکل ۴-۶۳). در واقع می‌توان گفت که تئوری انتقال رینولدز، قرینه انتگرالی مشتق مادی است. در هر حالت، نرخ تغییرات کل هر خاصیت سیال شامل دو بخش می‌باشد: یک بخش موضعی یا غیر دائم وجود دارد که برای محاسبه تغییرات در میدان جریان با زمان به کار می‌رود (جمله اول را در سمت راست معادله ۴-۱۲ با همان بخش در معادله ۴-۴۵ مقایسه کنید). هم چنین یک بخش جابه‌جایی وجود دارد که برای حرکت سیال از یک منطقه به منطقه دیگر به کار می‌رود (جمله دوم را در سمت راست معادلات ۴-۱۲ و ۴-۴۵ با هم مقایسه کنید)

چون مشتق مادی را برای هر خاصیت سیال، اسکالر یا برداری، می‌توان به کار برد، تئوری انتقال رینولدز را نیز برای هر خاصیت اسکالر یا برداری می‌توان به کار برد. در فصول ۵ و ۶ تئوری انتقال رینولدز را به ترتیب با انتخاب جرم، انرژی، مومنتوم و مومنتوم زاویه‌ای به جای B برای معادلات بقای جرم، انرژی، مومنتوم و مومنتوم زاویه‌ای به کار می‌بریم. در این روش به آسانی می‌توان قوانین اساسی بقا برای سیستم‌ها را (دیدگاه لاگرانژی) به شکل‌هایی که در تحلیل حجم معیار مفید هستند تبدیل کرد (دیدگاه اویلری).



شکل ۴-۶۳ تئوری انتقال رینولدز برای حجم‌های محدود (انتگرالی) مشابه با مشتق مادی برای حجم‌های بسیار کوچک است (تحلیل دیفرانسیلی). در هر دو حالت، ما از دیدگاه لاگرانژی یا سیستمی به دیدگاه اویلری یا حجم معیار منتقل می‌شویم.

خلاصه

سینماتیک سیالات به حرکت آنها می‌پردازد بدون این که با عامل حرکت یعنی نیروها سروکار داشته باشد. دو توصیف اساسی حرکت سیال وجود دارد که به آنها روش‌های لاگرانژی و اویلری می‌گویند. در توصیف لاگرانژی، ذرات سیال یا مجموعه‌ای از ذرات سیال را دنبال می‌کنیم، در حالی که در توصیف اویلری، حجم معیاری تعریف می‌کنیم که سیال به آن وارد و یا از آن خارج می‌شود. با استفاده از مشتق مادی برای ذرات سیال بی‌نهایت کوچک و هم‌چنین استفاده از تئوری انتقال رینولدز (RTT) برای سیستم‌های با حجم محدود معادلات حرکت را از توصیف لاگرانژی به توصیف اویلری تبدیل می‌کنیم.

برای هر خاصیت گسترده‌ای مانند B یا خاصیت متمرکز مربوط به آن یعنی b داریم:

$$\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})b \quad \text{مشتق مادی:}$$

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b) dV + \int_{CS} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad RTT \text{ کلی برای } CV \text{ متغیر:}$$

در هر دو معادله، نرخ کلی تغییرات هر خاصیت مرتبط با یک ذره سیال یا یک سیستم از دو بخش تشکیل شده است: بخش موضعی (غیر دائم) و بخش جابه‌جایی (حرکت). روش‌های مختلفی برای مشاهده و تحلیل میدان‌های جریان وجود دارد. این روش‌ها شامل خطوط جریان، خطوط اثر، خطوط مسیر، خطوط زمان، تصویربرداری سطحی، سایه نگاری، تصویربرداری چیلرن، منحنی‌های پروفیلی، منحنی‌های برداری و منحنی‌های کانتوری هستند. هر کدام از اینها را تعریف کرده و مثال‌هایی را نیز در این فصل آوردیم. در جریان غیر دائم، خطوط جریان، خطوط اثر و خطوط مسیر متفاوت‌اند، اما در جریان دائم، خطوط جریان، خطوط اثر و خطوط مسیر بر هم منطبق هستند.

برای تشریح کامل سینماتیک جریان سیال چهار نرخ کلی حرکت مورد نیاز است (نرخ‌های تغییر شکل). این نرخ‌ها عبارت‌اند از: سرعت (نرخ جابه‌جایی)، سرعت زاویه‌ای (نرخ چرخش)، نرخ کرنش خطی و نرخ کرنش زاویه‌ای. گردابی خاصیتی از جریان سیال است که چرخشی بودن ذرات آن را نشان می‌دهد،

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{curl}(\vec{V}) = 2\vec{\omega}$$

اگر در ناحیه‌ای از جریان گردابی صفر باشد در آن ناحیه جریان غیر چرخشی است. مفاهیمی که در این فصل آموخته شد، به طور مکرر در فصول دیگر این کتاب استفاده خواهند شد. در فصول ۵ و ۶ از RTT برای تبدیل معادلات بقای مربوط به سیستم‌های بسته به حجم معیار استفاده می‌کنیم و در فصل ۹ برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیلی حرکت دوباره از آن استفاده می‌کنیم. نقش گردابی و غیر چرخشی بودن با جزئیات بیشتری در فصل

۱۰ بررسی می‌شود و در آنجا نشان می‌دهیم که غیر چرخشی بودن به طور چشمگیری، پیچیدگی حل جریان‌های سیال را کم می‌کند. سرانجام از روش‌های مختلف مشاهده جریان و ترسیم اطلاعات برای تشریح سینماتیک جریان‌های سیال در مثال‌های همه فصول این کتاب استفاده می‌کنیم.

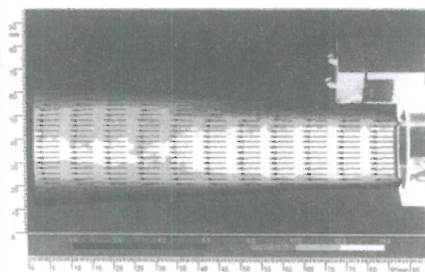
کاربرد: فعال کننده‌های سیالی

نویسنده میهمان: گارنش رامن، انستیتو تکنولوژی ایلینویز

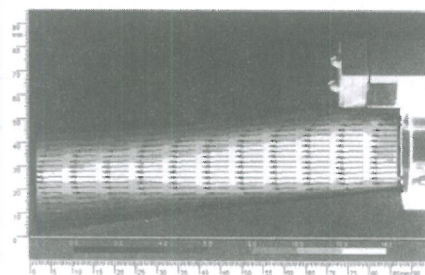
فعال کننده‌های سیالی وسائلی هستند که از مدارهای منطقی سیالی برای تولید سرعت نوسانی، یا از اختلالات فشار در جت‌ها و لایه‌های برشی برای به تعویق انداختن جدایش، افزایش اختلاط و از بین بردن نویز استفاده می‌کنند. فعال کننده‌های سیالی به دلایل بسیاری برای کاربردهای کنترل جریان برشی مفید هستند. آنها اجزای در حال حرکت ندارند، می‌توانند اختلالاتی ایجاد کنند که در فرکانس، دامنه و فاز قابل کنترل باشند، می‌توانند در محیط‌های گرمایی شدید کار کنند و تحت تأثیر میدان الکترومغناطیس قرار نمی‌گیرند و آنها به راحتی می‌توانند با یک وسیله در حال کار درگیر شوند. اگر چه سالیان درازی است که تکنولوژی فعال کننده‌های سیالی ایجاد شده، اما پیشرفت‌هایی که اخیراً در کوچک‌سازی آنها صورت گرفته، آنها را به کاندیدهای بسیار جذابی برای کاربردهای عملی تبدیل کرده است. فعال کننده سیالی با استفاده از اصل چسبیدن به دیوار و جریان برگشتی جریان‌های نوسانی خود پایداری ایجاد می‌کند که در مسیرهای کوچک این وسیله اتفاق می‌افتد.

شکل ۴-۶ کاربرد فعال کننده سیالی برای جت پیشران جهت‌دار را نشان می‌دهد. چون پیشران‌های جهت‌دار سیالی می‌توانند بدون ایجاد پیچیدگی در سطوح نزدیک به خروجی نازل‌ها و جت‌ها به کار روند، برای طراحی‌های آینده هواپیماها مهم خواهند بود. در سه تصویر شکل ۴-۶، خروجی‌های جت اصلی از راست به چپ هستند و یک فعال کننده سیالی در بالای آنها قرار گرفته است. شکل ۴-۶ الف جت بدون تغییر را نشان می‌دهند. شکل‌های ۴-۶ ب و ج اثر جهت‌دار کردن جت را در دو سطح تحریک سیالی نشان می‌دهند. تغییرات

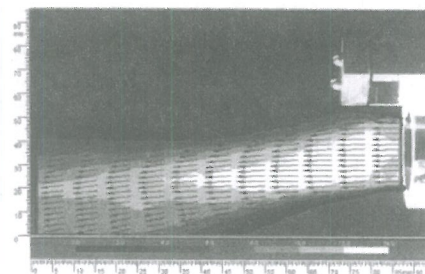
در جت اصلی، با استفاده از سرعت سنجی تصویر ذره (*PIV*) مشخص می‌شود. بیان ساده صورت زیر است: در این روش، ذرات ردیاب به داخل جریان فرستاده شده و توسط یک نوار نازک نور لیزر روشن می‌شوند تا قادر به ردیابی حرکت سیال شوند. نور پخش شده توسط ذرات در دو لحظه زمانی با استفاده از یک دوربین دیجیتال ضبط می‌شود. با استفاده از یک رابطه تصحیح داخلی فضایی، بردار جابه‌جایی موضعی به دست می‌آید. نتایج نشان می‌دهد که پتانسیلی برای افزودن اجزای چنگدانه سیالی به قطعات هواپیماها برای بهبود کارایی آنها وجود دارد.



(a)



(b)



(c)

شکل ۴-۶۴ میدان سرعت متوسط‌گیری شده زمانی یا جت فعال‌کننده سیال. نتایج حاصل از برهم نهی اثرات 150° اندازه‌گیری با دستگاه PIV هستند. به ترتیب هر هفت سرعت در جهت افقی و هر دو سرعت در جهت عمودی نشان داده شده‌اند. سطوح کانتوری مقدار میزان سرعت را برحسب m/s می‌دهد. (الف) بدون فعال‌کننده، (ب) یک فعال‌کننده منفردی در فشار کاری $3\text{ }psig$ و (ج) فعال‌کننده منفردی در فشار کاری $9\text{ }psig$.

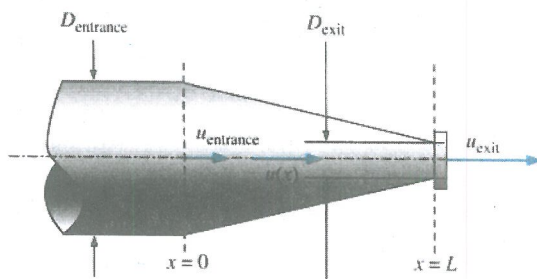
شکل ۴-۶۴ ترکیبی از یک نمودار برداری و نمودار کانتوری است. بردارهای سرعت روی نمودارهای کانتور سرعت (تندی) قرار گرفته‌اند. نواحی سفید نشان دهنده سرعت‌های بالا و نواحی تیره نشان دهنده سرعت‌های پایین هستند.

مسائل

مسائل مقدماتی

۱-۴ معنای لغت سینماتیک چیست؟ توضیح دهید که مطالعه سینماتیک سیال در برگیرنده چه چیزهایی می باشد.

۲-۴ جریان دائم آب عبوری، از نازل یک لوله آبپاش باغبانی تقارن محوری را در نظر بگیرید (شکل م ۲-۴). مطابق شکل سرعت در خط مرکزی نازل از (ورودی u) به (خروجی u) افزایش می یابد. اندازه گیری ها نشان می دهند که سرعت خط مرکزی آب در طول نازل به صورت سهموی افزایش می یابد. معادله ای برای سرعت خط مرکزی $u(x)$ بر حسب پارامترهای داده شده در $x=0$ و $x=L$ بنویسید.



شکل م ۲-۴

۳-۴ میدان سرعت دو بعدی و دائم زیر را در نظر بگیرید:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 1.2x)\vec{i} + (-2.0 - 1.2y)\vec{j}$$

آیا در این میدان جریان، نقطه سکون وجود دارد. این نقطه در کجاست؟

جواب: $x = 0.147$, $y = 1.67$

۴-۴ میدان سرعت دوبعدی دائم زیر را در نظر بگیرید:

$$\vec{V} = (u, v) = (a^2 - (b - cx)^2)\vec{i} + (-2cby + 2c^2xy)\vec{j}$$

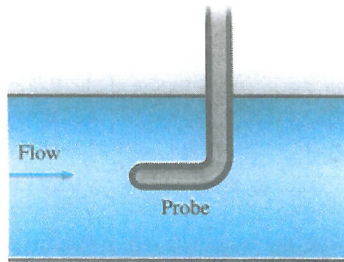
آیا در این میدان جریان نقطه سکون وجود دارد؟ این نقطه در کجاست؟

توصیفات لاگرانژی و اویلری

۵-۴ توصیف لاگرانژی حرکت سیال چیست؟

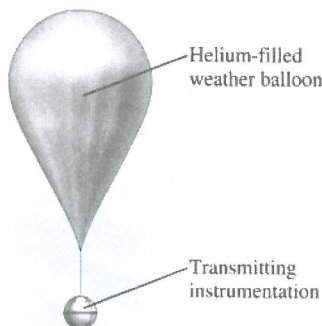
۶-۴ روش لاگرانژی تحلیل جریان سیال مشابه مطالعه سیستم است یا حجم معیار؟ توضیح دهید.

۷-۴ توصیف اویلری حرکت سیال چیست؟ تفاوت آن با توصیف لاگرانژی در چیست؟
 ۸-۴ یک وسیله اندازه‌گیری ساکن در جریان سیالی قرار می‌گیرد و فشار و دما را به صورت
 توابعی از زمان و مکان اندازه‌گیری نشان می‌دهد (شکل م ۴-۸). این اندازه‌گیری
 لاگرانژی است یا اویلری؟ توضیح دهید.



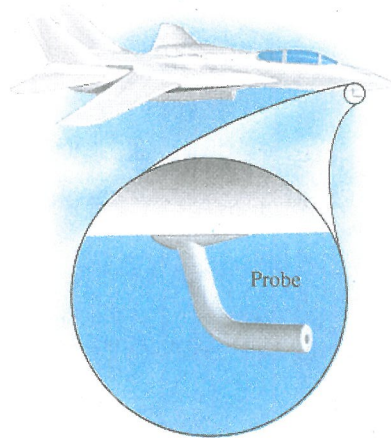
شکل م ۴-۸

۹-۴ یک فشارسنج الکترونیکی فوق‌العاده کوچک که دارای شناوری خنثی است در ورودی
 یک پمپ آب رها می‌شود و در طی عبور از پمپ تعداد ۲۰۰۰ فشار خوانده شده بر
 واحد زمان را منتقل می‌کند. این اندازه‌گیری‌ها، لاگرانژی‌اند یا اویلری؟ توضیح دهید.
 ۱۰-۴ یک بالون هواشناسی توسط سازمان هواشناسی به هوا فرستاده می‌شود. هنگامی که
 بالون به ارتفاعی می‌رسد که در آن ارتفاع دارای شناوری خنثی است، اطلاعاتی را در
 مورد شرایط آب و هوایی به ایستگاه‌های زمینی می‌فرستد (شکل م ۴-۱۰). این
 اندازه‌گیری‌ها لاگرانژی‌اند یا اویلری؟ توضیح دهید.



شکل م ۴-۱۰

۱۱-۴ یک لوله پیتوت-استاتیک را اغلب در زیر هواپیما مطابق شکل م ۱۱-۴ می‌بندند. با پرواز هواپیما لوله پیتوت سرعت نسبی باد را اندازه می‌گیرد. آیا این اندازه‌گیری لاگرانژی است یا اویلری؟ توضیح دهید.



شکل م ۱۱-۴

۱۲-۴ روش اویلری تحلیل جریان سیال شبیه مطالعه سیستم است یا حجم معیار؟ توضیح دهید.

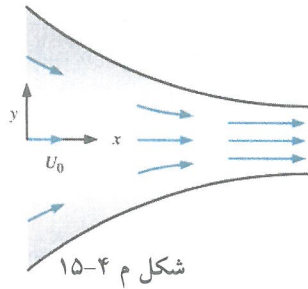
۱۳-۴ میدان جریان دائم در مختصات مرجع اویلری را تعریف کنید. در چنین جریان دائمی آیا ذرات سیال می‌توانند شتاب غیر صفر داشته باشند؟

۱۴-۴ حداقل سه نام دیگر برای مشتق مادی ذکر کنید و توضیح مختصری در مورد این‌که چرا هر یک از نام‌ها مناسب‌اند، بنویسید.

۱۵-۴ جریان دو بعدی، دائم و تراکم‌ناپذیر عبوری از یک کانال همگرا را در نظر بگیرید. (شکل م ۱۵-۴). برای چنین جریانی یک تخمین ساده برای میدان سرعت به صورت زیر است:

$$\vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j}$$

که U_0 سرعت افقی در $x=0$ است. توجه کنید که این معادله از اثرات لزجت در طول دیواره‌ها چشم‌پوشی می‌کند اما تخمین مناسبی برای سراسر میدان جریان می‌باشد. برای ذرات سیال عبوری از کانال شتاب مادی را محاسبه کنید. پاسخ خود را به دو روش بیان کنید: (الف) مؤلفه‌های شتاب a_x و a_y و (ب) بردار شتاب $\vec{a}$.



۱۶-۴ جریان عبوری از یک کانال همگرا با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۱۵-۴ مدل می‌شود. میدان فشار به صورت زیر داده شده است:

$$P = P_0 - \frac{\rho}{2} [2U_0bx + b^2(x^2 + y^2)]$$

که P_0 فشار در $x=0$ است. عبارتی برای تعیین نرخ تغییر فشار هر ذره سیال در این جریان به دست آورید.

۱۷-۴ مؤلفه‌های میدان سرعت دائم، تراکم‌ناپذیر و دوبعدی در صفحه xy به صورت زیر هستند:

$$u = 1/1 + 2/8x + 0/65y \quad v = 0/98 - 2/1x - 2/8y$$

میدان شتاب (عبارتی برای مؤلفه‌های شتاب a_x و a_y به دست آورید) را محاسبه کرده و شتاب در نقطه $(x,y) = (-2,3)$ را به دست آورید.

$$a_x = -9/233, \quad a_y = 14/37$$

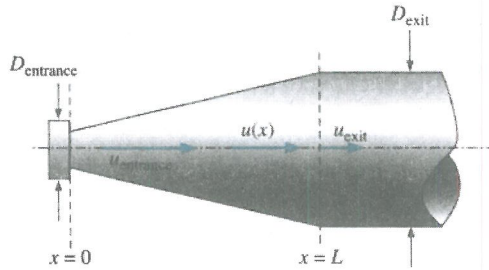
۱۸-۴ مؤلفه‌های میدان سرعت دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائم در صفحه xy به صورت زیر هستند:

$$u = 0/20 + 1/3x + 0/85y \quad v = -0/50 + 0/95x - 1/3y$$

میدان شتاب (عبارتی برای مؤلفه‌های شتاب a_x و a_y به دست آورید) را محاسبه کرده و شتاب در نقطه $(x,y) = (1,2)$ را به دست آورید.

۱۹-۴ برای میدان سرعت مسأله ۲-۴، شتاب سیال در امتداد خط مرکزی نازل را به صورت تابعی از x و پارامترهای داده شده به دست آورید.

۲۰-۴ جریان دائم هوای عبوری از بخش واگرای یک تونل باد را در نظر بگیرید (شکل م ۲۰-۴). مطابق شکل سرعت هوا در امتداد خط مرکزی واگرا از (ورودی u) به (خروجی u) کاهش می‌یابد. اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهند که سرعت هوای خط مرکزی در امتداد بخش واگرا به صورت سهموی کاهش می‌یابد. معادله‌ای برای سرعت خط مرکزی $u(x)$ برحسب پارامترهای داده شده در $x=0$ و $x=L$ بنویسید.



شکل م ۴-۲۰

۲۱-۴ برای میدان سرعت مسأله ۴-۲۰، شتاب سیال در امتداد خط مرکزی دیفیوزر را به صورت تابعی از x و پارامترهای داده شده به دست آورید. برای $L=2m$ و $u_{\text{ورودی}} = 30 m/s$ و $u_{\text{خروجی}} = 5 m/s$ ، شتاب در $x=0m$ و $x=1m$ را به دست آورید. جواب‌ها: 0 ، $-297 m/s^2$ ،

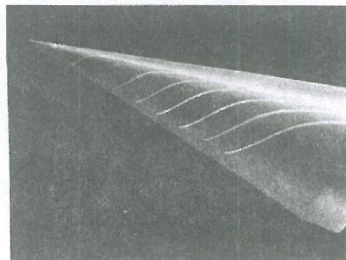
الگوهای جریان و مشاهده جریان

۲۲-۴ تعریف خط جریان چیست؟ خطوط جریان چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲۳-۴ جریان در یک کانال همگرا (شکل م ۴-۱۵) با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۴-۱۵ مدل می‌شود. عبارتی تحلیلی برای خطوط جریان این میدان به دست آورید. جواب: $y = C/(U_0 + bx)$

۲۴-۴ جریان در یک کانال همگرا با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۴-۱۵ مدل می‌شود. برای حالتی که $U_0 = 5 ft/s$ و $b = 4/6 s^{-1}$ است، تعدادی از خطوط جریان در $x=0ft$ تا $5ft$ و $y=-3ft$ تا $3ft$ را رسم کنید. مطمئن شوید که جهت خطوط جریان را نشان داده‌اید.

۲۵-۴ شکل م ۴-۲۵ جریان عبوری از روی یک مخروط 12° را نشان می‌دهد. آیا خطوط جریان، خطوط اثر، خطوط مسیر یا خطوط زمان را می‌بینیم؟ توضیح دهید.

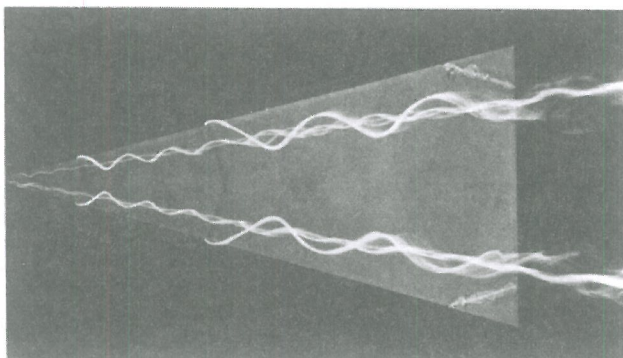


شکل م ۴-۲۵

۲۶-۴ تعریف خط مسیر چیست؟ خطوط مسیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

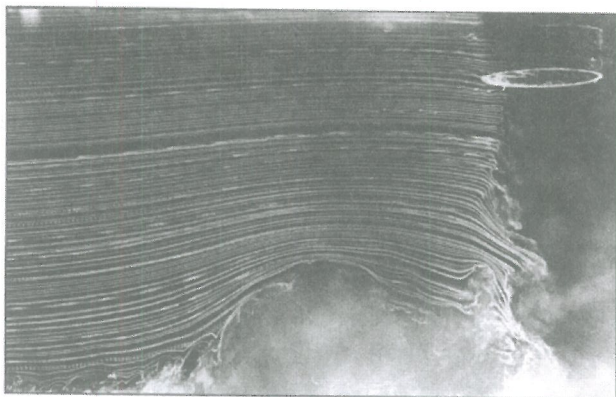
۲۷-۴ تعریف خط اثر چیست؟ خطوط اثر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲۸-۴ با استفاده از شکل م ۴-۲۸ جریان عبوری از روی یک بال دلتا شکل 15° را در نظر بگیرید. آیا خطوط جریان، خطوط اثر، خطوط مسیر یا خطوط زمان را می‌بینیم؟ توضیح دهید.



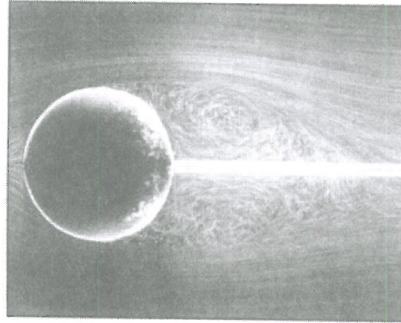
شکل م ۴-۲۸

۲۹-۴ جریان گردابه زمینی در شکل م ۴-۲۹ را در نظر بگیرید. آیا خطوط جریان، خطوط اثر، خطوط مسیر یا خطوط زمان را می‌بینیم؟ توضیح دهید.



شکل م ۴-۲۹

۳۰-۴ جریان روی کره شکل م ۴-۳۰ را در نظر بگیرید. آیا خطوط جریان، خطوط اثر، خطوط مسیر یا خطوط زمان را می‌بینیم؟ توضیح دهید.



شکل م ۴-۳۰

۳۱-۴ تعریف خط زمان چیست؟ چطور می‌توان در یک کانال آب خطوط زمان را ایجاد کرد؟ یکی از کاربردهایی را نام ببرید که خطوط زمان از خطوط اثر مفیدتر هستند.

۳۲-۴ برشی از سطح مقطع یک دسته از لوله‌های یک مبدل حرارتی را در نظر بگیرید (شکل م ۴-۳۲). برای هر یک از حالات زیر کدام یک از روش‌های مشاهده ترسیم جریان

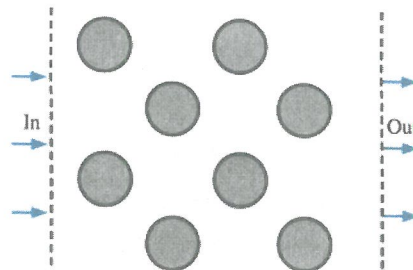
(ترسیم برداری یا کانتوری) مناسب‌تر هستند و چرا؟

(الف) مکانی که باید سرعت حداکثر سیال مشاهده شود.

(ب) جدائی جریان در ناحیه عقب لوله‌ها باید مشاهده شود.

(ج) میدان دما در سر تا سر صفحه باید مشاهده شود.

(د) توزیع مؤلفه‌های گردابی عمود بر صفحه باید مشاهده شوند.



شکل م ۴-۳۲

۳۳-۴ میدان سرعت دائم، تراکم‌ناپذیر و دوبعدی داده شده زیر را در نظر بگیرید:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 1.2x)\vec{i} + (-2 - 1.2y)\vec{j}$$

عبارتی تحلیلی برای خطوط جریان این میدان به دست آورید و تعدادی از خطوط جریان در یک چهارم سمت راست و بالایی را از $x=0$ تا 5 و $y=0$ تا 6 رسم کنید.

۳۴-۴ میدان سرعت دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائم مسأله ۳۳-۴ را در نظر بگیرید. ترسیم برداری سرعت در یک چهارم سمت راست و بالایی از $x=0$ تا 5 و $y=0$ تا 6 را به دست آورید.

۳۵-۴ میدان سرعت دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائم مسأله ۳۳-۴ را در نظر بگیرید. منحنی‌های برداری میدان شتاب در یک چهارم سمت راست و بالایی از $x=0$ تا 5 و $y=0$ تا 6 را به دست آورید.

۳۶-۴ میدان سرعت دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائمی به صورت زیر داده شده است:

$$\vec{V} = (u, v) = (1 + 2.5x + y)\vec{i} + (-0.5 - 1.5x - 2.5y)\vec{j}$$

که مختصات x و y بر حسب m و مقدار سرعت بر حسب m/s می‌باشد.
(الف) تعیین کنید که آیا نقاط سکون در این میدان جریان وجود دارند و اگر چنین است این نقاط در کجا قرار دارند؟

(ب) بردارهای سرعت را در چندین مکان در یک چهارم سمت راست و بالا از $x=0$ تا $4m$ و $y=0$ تا $4m$ رسم کنید. به صورت کیفی، میدان جریان را تشریح کنید.

۳۷-۴ میدان سرعت دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائم مسأله ۳۶-۴ را در نظر بگیرید.

(الف) شتاب مادی در نقطه $(x=2m, y=3m)$ را محاسبه کنید.

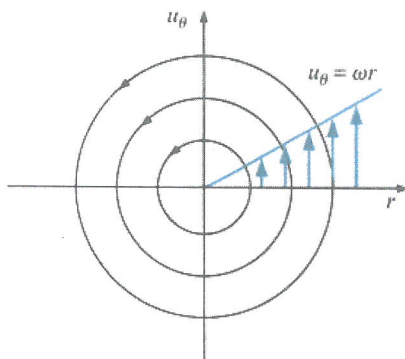
$$\text{جواب‌ها: } a_x = 11.5 m/s^2, a_y = 14 m/s^2$$

(ب) بردارهای شتاب مادی مقادیر x و y مسأله ۳۶-۴ را رسم کنید.

۳۸-۴ میدان سرعت برای چرخش یکپارچه در صفحه $r\theta$ (شکل م ۴-۳۸) توسط رابطه زیر داده شده است:

$$u_r = 0 \quad u_\theta = \omega r$$

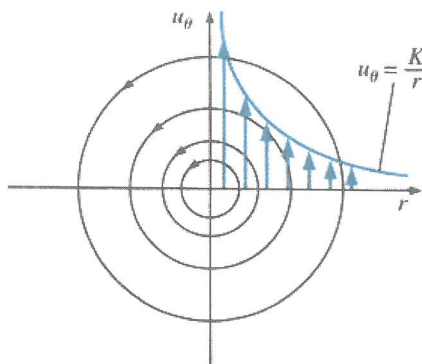
که ω مقدار سرعت زاویه‌ای ($\vec{\omega}$ در جهت z) است. برای حالتی که $\omega = 1 s^{-1}$ است، نمودار کانتوری مقدار سرعت (تندی) را رسم کنید. منحنی‌های سرعت ثابت m/s ۰.۵، ۱، ۱.۵، ۲، ۲.۵ را رسم کنید. مطمئن شوید که بر حسب این سرعت‌ها را روی نمودارها قرار داده‌اید.



شکل م ۳۸-۴

۳۹-۴ میدان سرعت برای یک گردابه خطی در صفحه $r\theta$ (شکل م ۳۹-۴) به صورت زیر داده شده است:

$$u_r = 0 \quad u_\theta = \frac{K}{r}$$



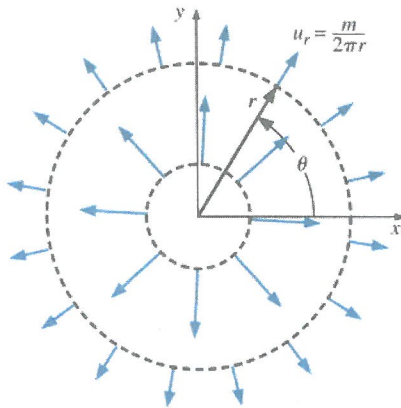
شکل م ۳۹-۴

که K قدرت گردابه خطی است. برای حالتی که $K = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ است، مقدار سرعت (تندی) را به صورت کانتوری رسم کنید. منحنی‌های سرعت ثابت $1/5, 2, 2/5 \text{ m/s}$ و $\vec{V} = 0/5$ را رسم کنید. مطمئن شوید که بر چسب این سرعت‌ها را روی نمودارها قرار داده‌اید.

۴۰-۴ میدان سرعت برای یک چشمه خطی در صفحه $r\theta$ (شکل م ۴۰-۴) به صورت زیر داده شده است:

$$u_r = \frac{m}{2\pi} \quad u_\theta = 0$$

که m قدرت چشمه خطی است. برای حالتی که $m/(2\pi) = 1/5 \text{ m}^2/\text{s}$ است، مقدار سرعت (تندی) را به صورت کانتوری رسم کنید. منحنی‌های سرعت ثابت $2/5 \text{ m/s}$ ، 1 ، $1/5$ و $V=0/5$ را رسم کنید. مطمئن شوید که بر چسب این سرعت‌ها را روی نمودارها قرار داده‌اید.



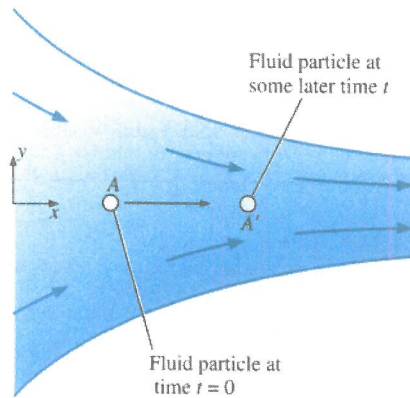
شکل م ۴-۴۰

حرکت و تغییر شکل المان‌های سیال

۴-۴۱ چهار نوع اساسی از انواع حرکت یا تغییر شکل‌های ذرات سیال را نام برده و در مورد هر کدام توضیح مختصری بنویسید.

۴-۴۲ جریان درون یک کانال همگرا (شکل م ۴-۱۵) با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۴-۱۵ مدل می‌شود. آیا این میدان جریان چرخشی است یا غیر چرخشی؟ تمام جزئیات کار را نشان دهید. جواب: غیر چرخشی

۴-۴۳ جریان درون یک کانال همگرا با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۴-۱۵ مدل می‌شود. ذره سیال (A) در زمان $t=0$ روی محور x در $x=x_A$ قرار گرفته است (شکل م ۴-۴۳). در زمان بعدی t ، ذره سیال با جریان به سمت پایین دست حرکت کرده و مطابق شکل در مکان جدید، $x=x_A'$ قرار می‌گیرد. چون جریان حول محور x متقارن است، ذره سیال در تمام زمان‌ها روی محور x باقی می‌ماند. عبارتی

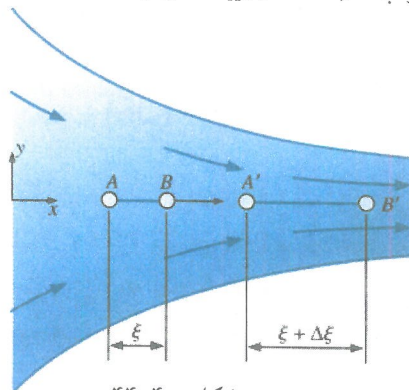


شکل م ۴۳-۴

تحلیلی برای مکان x ذره سیال در زمان دلخواه t بر حسب مکان اولیه آن x_A و ثابت‌های U و b به دست آورید. به عبارت دیگر، عبارتی برای $x_{A'}$ به دست آورید. (تذکر: می‌دانیم که برای یک ذره سیال $u = dx_{particle} / dt$ است. u را وارد کرده، متغیرها را تفکیک کنید و سپس انتگرال‌گیری کنید).

۴۴-۴

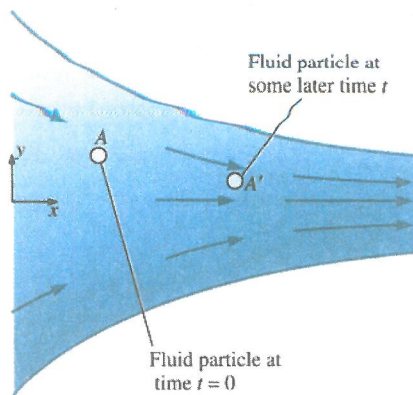
جریان در یک کانال همگرا با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۴-۱۵ مدل می‌شود. چون جریان حول محور x متقارن است، پاره خط AB که روی محور x قرار گرفته است بر روی این محور باقی می‌ماند، اما طول آن هنگامی که در خط مرکزی کانال جریان می‌یابد از ξ به $\xi + \Delta\xi$ افزایش می‌یابد (شکل م ۴۴-۴). عبارتی تحلیلی برای تغییر طول پاره خط، $\Delta\xi$ ، بیابید (تذکر: از نتیجه مسأله ۴۳-۴ استفاده کنید). جواب: $(x_B - x_A)(e^{bt} - 1)$



شکل م ۴۴-۴

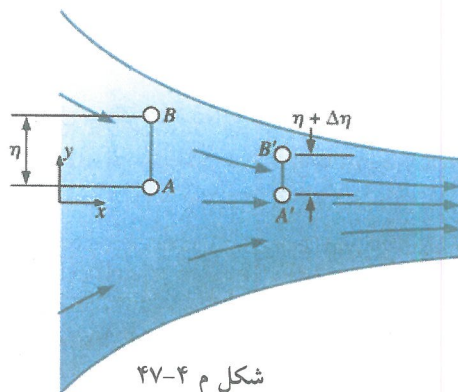
۴۵-۴ با استفاده از نتایج مسأله ۴-۴۴ و تعریف نرخ کرنش خطی (نرخ افزایش طول بر واحد طول) عبارتی برای نرخ کرنش خطی ذرات سیال واقع بر خط مرکزی کانال در امتداد محور x (ϵ_{xx}) بیابید. نتایج خود را با عبارت کلی ϵ_{xx} بر حسب میدان سرعت، یعنی $\epsilon_{xx} = \partial u / \partial x$ مقایسه کنید. (تذکر: هنگامی که $t \rightarrow 0$ می‌رود حد بگیرید. شما ممکن است که به منقطع کردن بسط سری e^{bt} نیاز داشته باشید). جواب: (b)

۴۶-۴ جریان در یک کانال همگرا با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۴-۱۵ مدل می‌شود. ذره سیال (A) در زمان $t \rightarrow 0$ در مکان $x = x_A$ و $y = y_A$ واقع شده است (شکل م ۴-۴۶). در زمان t ، ذره سیال در هنگام جریان به پایین دست حرکت می‌کند و مطابق شکل در مکان، $x = x_{A'}$ و $y = y_{A'}$ قرار می‌گیرد. عبارتی تحلیلی برای موقعیت y ذره سیال در زمان دلخواه t بر حسب مکان اولیه y_A و ثابت b به دست آورید. به عبارت دیگر، عبارتی برای $y_{A'}$ به دست آورید. (تذکر: می‌دانیم که برای ذره سیال مربوطه $v = dy_{particle} / dt$ است، معادله را برای yAe^{-bt} جایگذاری کرده و متغیرها را تفکیک و انتگرال‌گیری کنید). جواب:



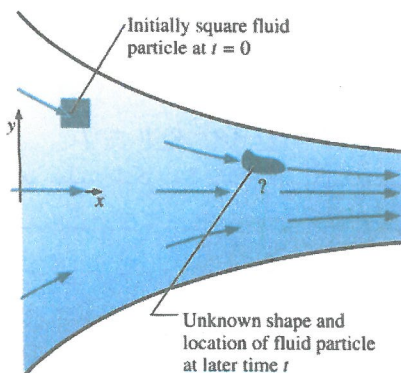
شکل م ۴-۴۶

۴۷-۴ جریان در یک کانال همگرا با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۴-۱۵ مدل می‌شود. مطابق شکل م ۴-۴۷ هنگامی که پاره خط عمودی AB به سمت پایین دست حرکت می‌کند طول آن از η به $\eta + \Delta\eta$ می‌رسد. عبارتی تحلیلی برای تغییر طول پاره خط، $\Delta\eta$ ، به دست آورید. توجه کنید که تغییر در طول، $\Delta\eta$ ، منفی است. (تذکر: از نتیجه مسأله ۴-۴۶ استفاده کنید).



۴۸-۴ با استفاده از نتایج مسأله ۴-۴۷ و تعریف نرخ کرنش خطی (نرخ افزایش طول بر واحد طول)، عبارتی برای نرخ کرنش خطی (ϵ_{yy}) ذرات سیال در حال حرکت به سمت پایین به دست آورید. نتایج خود را با عبارت کلی ϵ_{yy} بر حسب میدان سرعت، یعنی $\epsilon_{yy} = \partial v / \partial y$ مقایسه کنید (تذکر: هنگامی که $t \rightarrow 0$ می‌رود حد بگیرید. ممکن است که به اعمال منقطع کردن بسط سری e^{-bt} نیاز داشته باشید).

۴۹-۴ جریان در یک کانال همگرا با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۴-۱۵ مدل می‌شوند. برای حالتی که $U_0 = 5 \text{ ft/s}$ و $b = 4/6 \text{ s}^{-1}$ می‌باشد، ذره سیالی که در ابتدا به شکل مربع با ابعاد 0.5 ft بوده و در زمان $t = 0$ در $x = 0.5 \text{ ft}$ و $y = 1.0 \text{ ft}$ قرار داشته است را در نظر بگیرید (شکل م ۴-۴۹). محاسبه را به دقت انجام دهید و در زمان $t = 0.2 \text{ sec}$ جایی که ذره سیال قرار دارد و شکلی که به آن شبیه است را ترسیم کنید. اعوجاج ذره سیال را توضیح دهید (تذکر: از نتایج مسائل ۴-۴۳ و ۴-۴۶ استفاده کنید).



شکل م ۴-۴۹

۵۰-۴ با استفاده از نتایج مسأله ۴-۴۹، نشان دهید که میدان جریان یک کانال همگرا قطعاً تراکم‌ناپذیر است.

۵۱-۴ جریان در داخل یک کانال همگرا با استفاده از میدان سرعت دو بعدی و دائم مسأله ۴-۱۵ مدل می‌شود. با استفاده از معادله نرخ کرنش حجمی، ثابت کنید که این میدان جریان تراکم‌ناپذیر است.

۵۲-۴ معادله عمومی یک میدان سرعت دو بعدی و دائم در هر دو جهت فضایی (x و y) خطی است، یعنی:

$$\vec{V} = (u, v) = (U + a_1 x + b_1 y)\vec{i} + (V + a_2 x + b_2 y)\vec{j}$$

که U و V ضرایب ثابت هستند. با فرض این که ابعاد آنها به طور مناسبی تعریف شده‌اند، مؤلفه‌های x و y میدان شتاب را محاسبه کنید.

۵۳-۴ برای میدان سرعت مسأله ۴-۵۲، ارتباط میان ضرایب به چه صورتی باشد تا میدان جریان تراکم‌ناپذیر شود. جواب: $a_1 + b_2 = 0$

۵۴-۴ برای میدان سرعت مسأله ۴-۵۲، نرخ‌های کرنش خطی در جهات x و y را محاسبه کنید. جواب‌ها: a_1, b_2

۵۵-۴ برای میدان سرعت مسأله ۴-۵۲، نرخ کرنش برشی در صفحه xy را محاسبه کنید.

۵۶-۴ نتایج حاصل از مسائل ۴-۵۴ و ۴-۵۵ را با هم ادغام کرده تا تانسور نرخ کرنش دو بعدی ε_{ij} در صفحه xy را به صورت زیر تشکیل دهید:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

۵۷-۴ تحت چه شرایطی محورهای x و y ، محورهای اصلی هستند؟ جواب: $b_1 + a_2 = 0$

۵۸-۴ برای میدان سرعت مسأله ۴-۵۲، بردار گردابی محاسبه کنید. بردار گردابی در کدام جهت است؟ جواب: $(a_2 - b_1)\vec{k}$

۵۹-۴ یک جریان برشی دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائم را در نظر بگیرید که میدان سرعت آن به صورت زیر است:

$$\vec{V} = (u, v) = (a + by)\vec{i} + 0\vec{j}$$

که a و b ثابت هستند. مطابق شکل م ۴-۵۸ ذره سیال مستطیلی کوچکی با ابعاد dx و dy در زمان t رسم شده است. ذره سیال در زمان $t + dt$ همراه با جریان شروع به حرکت کرده و تغییر شکل می‌دهد و مطابق شکل این ذره دیگر مستطیلی نمی‌باشد. مکان اولیه هر گوشه از سیال در شکل م ۴-۵۸ مشخص شده است. گوشه سمت چپ پایین در زمان t در مکان (x, y) است، جایی که مؤلفه x سرعت $u = a + by$ است. در

زمان بعد، این گوشه به مکان $(x + udt, y)$ یا به مکان

$$(x + (a + by)dt, y)$$

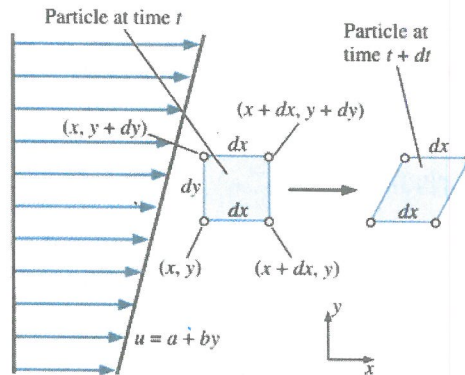
حرکت می‌کند،

(الف) با روندی مشابه، مکان هر یک از سه گوشه ذره سیال در زمان $t+dt$ را محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از تعریف نرخ کرنش خطی (نرخ افزایش طول بر واحد طول)، نرخ‌های کرنش خطی ϵ_{xx} و ϵ_{yy} را محاسبه کنید. جواب‌ها: $0, 0$

(ج) نتایج حاصل را با آنچه از معادله ϵ_{xx} و ϵ_{yy} در مختصات کارتزین به دست آمده را مقایسه کنید، یعنی:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$



شکل م ۴-۵۸

۵۹-۴ با استفاده از دو روش زیر ثابت کنید که جریان مسأله ۴-۵۸ تراکم‌ناپذیر است:

(الف) با محاسبه حجم ذره سیال در هر دو زمان

(ب) با محاسبه نرخ کرنش حجمی

توجه کنید که باید قبل از این مسأله، مسأله ۴-۵۸ کامل شود.

۶۰-۴ میدان جریان دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائم مسأله ۴-۵۸ را در نظر بگیرید. با استفاده

از نتایج مسأله ۴-۵۸ الف، کارهای زیر را انجام دهید:

(الف) با استفاده از تعریف نرخ کرنش برشی (نصف نرخ کاهش زاویه‌ای میان دو خط که در ابتدا بر هم عمود بوده و همدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند) نرخ کرنش برشی ϵ_{xy} در صفحه xy را محاسبه کنید. (تذکر: از لبه پایینی و لبه سمت چپ ذره سیال استفاده کنید که در زمان آغاز در گوشه پایینی سمت چپ همدیگر را با زاویه 90° قطع کرده‌اند).

(ب) نتایج حاصل را با آنچه از معادله ϵ_{xy} در مختصات کارتزین به دست می‌آید،

یعنی:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

مقایسه کنید. جواب‌ها: (الف) $b/2$ (ب) $b/2$

۶۱-۴ میدان جریان دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائم مسأله ۴-۵۸ را در نظر بگیرید. با استفاده از نتایج مسأله ۴-۵۸ الف، کارهای زیر را انجام دهید:

(الف) با استفاده از تعریف نرخ چرخش (نرخ چرخش متوسط دو خط که در ابتدا بر هم عمود بوده‌اند و یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند)، نرخ چرخش سیال در صفحه xy و ω_z را محاسبه کنید (تذکر: لبه پایینی و لبه سمت چپ ذره سیال را در نظر بگیرید که در زمان اولیه یکدیگر را در گوشه پایینی سمت چپ در زاویه 90° قطع کرده‌اند).

(ب) نتایج حاصل را با آنچه از معادله ω_z در مختصات کارتزین به دست می‌آید، مقایسه کنید. یعنی:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

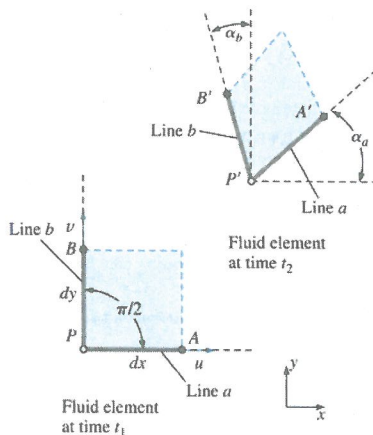
جواب‌ها: (الف)، $b/2$ - (ب) $-b/2$

۶۲-۴ با استفاده از نتایج مسأله ۴-۶۱،

(الف) جریان چرخشی است یا غیر چرخشی؟

(ب) مؤلفه z گردابی در این میدان جریان را محاسبه کنید.

۶۳-۴ یک المان سیال دو بعدی با ابعاد dx و dy مطابق شکل م ۴-۶۳ در طی مدت زمان



شکل م ۴-۶۳

$dt = t_4 - t_1$ جابه‌جا شده و دچار اعوجاج می‌شود. در زمان اولیه مؤلفه‌های سرعت در نقطه P در جهات x و y به ترتیب u و v می‌باشند. نشان دهید که مقدار نرخ چرخش (سرعت زاویه‌ای) حول نقطه P در صفحه xy به صورت زیر است:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

۶۴-۴ المان دو بعدی سیال با ابعاد dx و dy مطابق شکل م ۴-۶۳ در طی مدت زمان $dt = t_4 - t_1$ جابه‌جا شده و دچار اعوجاج می‌شود. در زمان اولیه مؤلفه‌های سرعت در نقطه P در جهات x و y به ترتیب u و v هستند. پاره خط PA در شکل م ۴-۶۳ را در نظر گرفته و نشان دهید که مقدار نرخ کرنش خطی در جهت x به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

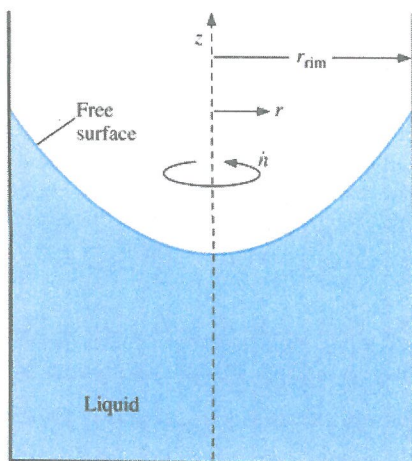
۶۵-۴ یک المان دو بعدی سیال با ابعاد dx و dy مطابق شکل م ۴-۶۳ در طی مدت زمان $dt = t_4 - t_1$ جابه‌جا شده و دچار اعوجاج می‌شود. در زمان اولیه، مؤلفه‌های سرعت در نقطه P در جهات x و y به ترتیب u و v هستند. نشان دهید که نرخ کرنش برشی حول نقطه P در صفحه xy به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

۶۶-۴ میدان جریان تراکم‌ناپذیر، دو بعدی و دائم در صفحه xy را در نظر بگیرید. نرخ کرنش خطی در جهت x $2/5 s^{-1}$ است. نرخ کرنش خطی در جهت y را محاسبه کنید.

۶۷-۴ مخزن آب استوانه‌ای شکلی به صورت پادساعتگرد، حول محور دوران خود (شکل م ۴-۶۷) با سرعت زاویه‌ای $\dot{n} = 360 \text{ rpm}$ به صورت یکپارچه می‌چرخد. گردابی ذرات سیال داخل مخزن را محاسبه کنید.

جواب: $75/4 \text{ k rad/s}$



شکل م ۴-۶۷

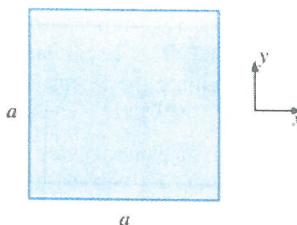
۶۸-۴ مخزن آب استوانه‌ای شکلی حول محور عمودی خود (شکل م ۴-۶۷) می‌چرخد. از سیستم *PIV* برای اندازه‌گیری گردابی جریان استفاده می‌شود. مقدار گردابی اندازه‌گیری شده در جهت z برابر با $55/4 \text{ rad/s}$ است و این مقدار در هر جا با حدود $\pm 0/5$ درصد ثابت باقی می‌ماند. سرعت زاویه‌ای چرخش مخزن بر حسب rpm را محاسبه کنید. آیا مخزن حول محور دوران خود در جهت ساعتگرد می‌چرخد یا پادساعتگرد؟

۶۹-۴ یک مخزن استوانه‌ای با شعاع $r_{rim} = 0/35 \text{ m}$ حول محور دوران خود می‌چرخد (شکل م ۴-۶۷). بخشی از این مخزن از روغن پر شده است. سرعت لبه مخزن $2/5 \text{ m/s}$ در جهت پادساعتگرد است (اگر از بالا نگاه شود) و مخزن مدت طولانی در حال دوران بوده به طوری که حرکت آن را به صورت دوران و یکپارچه می‌توان در نظر گرفت. برای هر ذره سیال موجود در مخزن، مقدار مؤلفه گردابی در جهت z را محاسبه کنید. جواب: 15 rad/s

۷۰-۴ ارتباط میان گردابی و چرخشی بودن را توضیح دهید.

۷۱-۴ یک میدان جریان تراکم‌ناپذیر و دو بعدی را در نظر بگیرید که یک بسته مربعی شکل سیال در آن حرکت کرده و تغییر شکل می‌دهد. در زمان t ابعاد بسته سیال a بوده و مطابق شکل م ۴-۷۱ بسته سیال در راستای محورهای x و y قرار دارد. در زمان

بعد، این بسته هنوز در امتداد محورهای x و y است، اما به مستطیلی با طول افقی $2a$ تغییر شکل پیدا کرده است. در این زمان طول عمودی بسته سیال مستطیلی چقدر است؟



شکل م ۴-۷۱

۷۲-۴ یک میدان جریان تراکم‌پذیر و دو بعدی را در نظر بگیرید که بسته سیالی که در ابتدا به شکل مربع بوده است در آن حرکت کرده و تغییر شکل می‌دهد. مطابق شکل م ۴-۷۱ ابعاد بسته سیال در زمان t برابر با a است این اضلاع در امتداد محورهای x و y واقع شده‌اند. در زمان بعد، بسته سیال هنوز در امتداد محور x و y قرار دارد، اما این بسته به مستطیلی با طول $1.06a$ و عرض $0.931a$ تغییر شکل پیدا کرده است (چون جریان دو بعدی است بعد بسته سیال در جهت z تغییر نمی‌کند). چگالی بسته سیال با چه درصدی افزایش یا کاهش می‌یابد؟

۷۳-۴ میدان سرعت سه بعدی و دائم زیر را در نظر بگیرید:

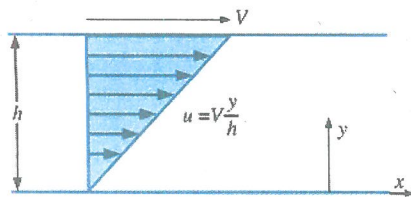
$$\begin{aligned}\vec{V} &= (u, v, w) \\ &= (3/0 + 2/0x - y)\vec{i} + (2/0x - 2/0y)\vec{j} + (0.5xy)\vec{k}\end{aligned}$$

بردار گردابی را به صورت تابعی از فضا (x, y, z) محاسبه کنید.

۷۴-۴ جریان کاملاً توسعه یافته کوئت، جریان بین دو صفحه موازی نامحدود است که به فاصله h از هم قرار دارند و طبق شکل م ۴-۷۴ صفحه پایینی ساکن بوده و صفحه بالایی در حال حرکت است، را در نظر بگیرید. جریان در صفحه xy دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائم است و میدان سرعت طبق رابطه زیر داده شده است:

$$\vec{V} = (u, v) = V \frac{y}{h} \vec{i} + 0 \vec{j}$$

آیا جریان چرخشی است یا غیر چرخشی؟ اگر جریان چرخشی است، مؤلفه گردابی در جهت z را محاسبه کنید. آیا ذرات سیال در این جریان به صورت ساعتگرد می چرخند یا پادساعتگرد؟ جواب: بله، $-V/h$ ، ساعتگرد



شکل م ۴-۷۴

۷۵-۴ برای جریان کوئت شکل م ۴-۷۴، نرخ‌های کرنش خطی در جهات x و y و نرخ کرنش برشی ϵ_{xy} را محاسبه کنید.

۷۶-۴ نتایج حاصل از مسأله ۴-۷۵ را ترکیب کنید تا تانسور نرخ کرنش دو بعدی ϵ_{ij} را به صورت زیر تشکیل دهید:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

آیا محورهای x و y محورهای اصلی هستند؟

تئوری انتقال رینولدز

۷۷-۴ درست یا غلط: برای هر عبارت کلمه صحیح یا غلط را انتخاب کرده و در خصوص پاسخ خود مختصراً بحث کنید.

(الف) تئوری انتقال رینولدز برای تبدیل معادلات بقا از شکل‌های ذاتی موجود برای حجم معیار به شکل‌های سیستمی مفید هستند.

(ب) تئوری انتقال رینولدز فقط برای حجم معیارهای غیر قابل تغییر شکل قابل اعمال است.

(ج) تئوری انتقال رینولدز را هم برای میدان‌های جریان دائم هم غیر دائم می‌توان به کار برد.

(د) تئوری انتقال رینولدز را هم برای کمیت‌های اسکالر و هم برداری می‌توان به کار برد.

۷۸-۴ شکل کلی تئوری انتقال رینولدز (RTT) به صورت زیر داده شده است:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA$$

که $\vec{V}_r$ سرعت سیال نسبت به سطح معیار است. B_{sys} را برابر با جرم m یک سیستم از ذرات سیال قرار دهید. می‌دانیم که طبق تعریف هیچ جرمی به سیستم وارد و یا خارج نمی‌شود، پس $dm/dt = 0$ است. با استفاده از معادله داده شده، معادله بقای جرم را برای یک حجم معیار به دست آورید.

۷۹-۴ شکل کلی تئوری انتقال رینولدز (RTT) که در مسأله ۷۸-۴ داده شده است را در نظر بگیرید. B_{sys} را با مومنتوم خطی $m\vec{V}$ یک سیستم از ذرات سیال برابر قرار دهید. می‌دانیم که برای یک سیستم، قانون دوم نیوتن به صورت زیر است:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})_{sys}$$

با استفاده از معادله مسأله ۷۸-۴ و این معادله، معادله بقای مومنتوم خطی برای یک حجم معیار را به دست آورید.

۸۰-۴ شکل کلی تئوری انتقال رینولدز (RTT) که در مسأله ۷۸-۴ داده شده است را در نظر بگیرید. B_{sys} را با مومنتوم زاویه‌ای $\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$ یک سیستم از ذرات سیال برابر قرار دهید، که $\vec{r}$ بازوی گشتاور است. می‌دانیم که برای یک سیستم، اصل بقای مومنتوم زاویه‌ای را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\sum \vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{H}_{sys}$$

که $\sum \vec{M}$ گشتاور خالص وارد به سیستم است. با استفاده از معادله داده شده در مسأله ۷۸-۴ و این معادله، معادله بقای مومنتوم زاویه‌ای را برای حجم معیار به دست آورید.

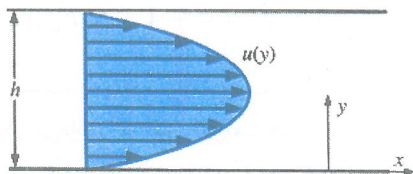
۸۱-۴ عبارت زیر را تا حد ممکن ساده کنید:

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_{x=At}^{x=Bt} e^{-2x^2} dx$$

(تذکر: از تئوری لایب نیتز یک بعدی استفاده کنید.) جواب: $Be^{-B^2t^2} - Ae^{-A^2t^2}$

مسائل مروری

۸۲-۴ جریان کاملاً توسعه یافته دو بعدی جریان پوازیه را در نظر بگیرید. همان‌طور که در شکل م ۸۲-۴ نشان داده شده، این جریان، جریان بین دو صفحه موازی نامحدود است، که در فاصله h از یکدیگر قرار دارند و در آن صفحه بالایی و پایینی ساکن بوده و گرادیان فشار، dP/dx نیروی محرک جریان است (dP/dx منفی و



شکل م ۴-۸۲

ثابت است). جریان دائم، تراکم‌ناپذیر و دو بعدی در صفحه xy است، مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر داده شده‌اند:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (y^2 - hy) \quad v = 0$$

که μ لزجت سیال است. آیا جریان چرخشی است یا غیر چرخشی؟ اگر جریان چرخشی است مؤلفه گردابی در جهت z را محاسبه کنید. آیا در این جریان ذرات سیال ساعتگرد می‌چرخند یا پادساعتگرد؟

۸۳-۴ برای جریان دو بعدی مسأله ۸۲-۴، نرخ‌های کرنش خطی در جهات x و y و نرخ کرنش برشی ϵ_{xy} را محاسبه کنید.

۸۴-۴ نتایج حاصل از مسأله ۸۳-۴ را ادغام کرده و تانسور نرخ کرنش دو بعدی ϵ_{ij} در صفحه xy را به صورت زیر تشکیل دهید:

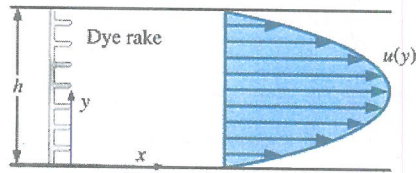
$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

آیا محورهای x و y محورهای اصلی هستند؟

۸۵-۴ جریان پوازیه دو بعدی مسأله ۸۲-۴ را در نظر بگیرید. سیال بین دو صفحه، آب در دمای 40°C می‌باشد. اندازه شکاف را $h = 1.6\text{mm}$ و گرادیان فشار را $dP/dx = -230\text{N/m}^3$ قرار دهید. هفت خط مسیر از $t = 0$ تا $t = 1\text{s}$ را محاسبه و رسم کنید. ذرات سیال در $x = 0$ و $y = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4\text{mm}$ تزریق شده‌اند.

۸۶-۴ جریان دو بعدی پوازیه مسأله ۸۲-۴ را در نظر بگیرید. سیال بین صفحات، آب در دمای 40°C است. اندازه شکاف $h = 1.6\text{mm}$ و گرادیان فشار $dP/dx = -230\text{N/m}^3$ می‌باشد. هفت خط اثر را که از یک شیار رنگ سرچشمه گرفته‌اند و رگه‌های رنگ را در $x = 0$ و $y = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4\text{mm}$ ایجاد کرده‌اند محاسبه و ترسیم کنید. رنگ از زمان $t = 0$ تا $t = 1\text{s}$ تزریق شده است و

خطوط اثر باید در $t=10s$ رسم شوند.

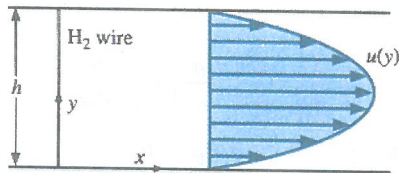


شکل م ۴-۸۶

۸۷-۴ مسأله ۴-۸۶ را دوباره تکرار کنید، با این تفاوت که رنگ از $t=0$ تا $t=10s$ تزریق شده و خطوط اثر به جای $t=10s$ باید در $t=12s$ ترسیم شوند.

۸۸-۴ نتایج مسائل ۴-۸۶ و ۴-۸۷ را مقایسه کنید و در مورد نرخ کرنش خطی در جهت x توضیح دهید.

۸۹-۴ جریان پوازیه دو بعدی مسأله ۴-۸۲ را در نظر بگیرید. سیال بین صفحات آب در دمای $40^\circ C$ است. اندازه شکاف $h=0.6mm$ و گرادیان فشار $dp/dx = -230 N/m^2$ می باشد. یک سیستم حباب هیدروژنی را در نظر بگیرید که به صورت عمودی در $x=0$ نصب شده است (شکل م ۴-۸۹). سیم به صورتی شروع به تبیدن می کند که حباب ها به صورت پریودیک ایجاد شده و خطوط زمان را ایجاد می کند. پنج خط زمانی متمایز در $10s$ ، 5 و 7.5 و 2.5 و $t=0$ ایجاد شده است. با انجام محاسبه و ترسیم مشخص کنید که آیا این پنج خط زمان در زمان $t=12.5s$ به هم شبیه هستند.



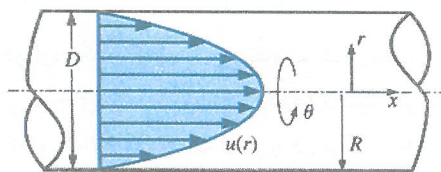
شکل م ۴-۸۹

۹۰-۴ جریان پوازیه کاملاً توسعه یافته تقارن محوری را در نظر بگیرید. جریان پوازیه، جریان در یک لوله دایروی با شعاع R است (قطر $D=2R$) که مطابق شکل م ۴-۹۰ گرادیان فشار dp/dx ، نیروی محرک جریان است (dp/dx ثابت و منفی است). جریان

دائم، تراکم‌ناپذیر و تقارن محوری حول محور x است. مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر داده شده‌اند:

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} (r^2 - R^2) \quad u_r = 0 \quad u_\theta = 0$$

که μ لزجت سیال است. آیا جریان چرخشی است یا غیر چرخشی؟ اگر جریان چرخشی است مؤلفه گردابی در جهت مماسی (θ) را محاسبه کنید و در مورد علامت چرخش بحث کنید.



شکل م ۴-۹۰

۹۱-۴ برای جریان پوازیه. تقارن محوری مسأله ۴-۹۰، نرخ کرنش‌های خطی در جهات x و r را محاسبه کرده و نرخ کرنش برشی ϵ_{xr} را محاسبه کنید. تانسور نرخ کرنش در مختصات استوانه‌ای (r, θ, x) و (u_r, u_θ, u_x) به صورت زیر است:

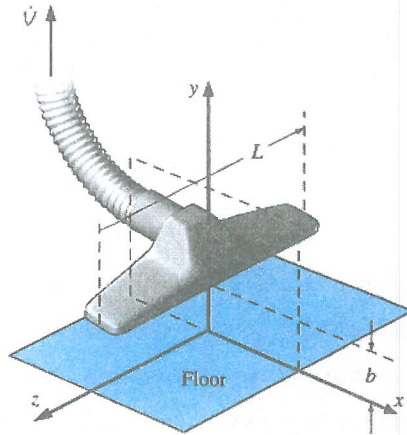
$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{rx} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta x} \\ \epsilon_{xr} & \epsilon_{x\theta} & \epsilon_{xx} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

۹۲-۴ نتایج حاصل از مسأله ۴-۹۱ را ادغام کنید و تانسور نرخ کرنش تقارن محوری ϵ_{ij} را به صورت زیر تشکیل دهید:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rx} \\ \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}$$

آیا محورهای x و r محورهای اصلی هستند؟



شکل م ۴-۹۳

۹۳-۴ جریان هوای ورودی به دریچه یک جاروبرقی را با مؤلفه‌های سرعت زیر در صفحه میانی (صفحه xy) تقریب می‌زنیم:

$$u = \frac{-\dot{V}x}{\pi L} \frac{x^2 + y^2 + b^2}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2b^2 + y^4 - 2y^2b^2 + b^4}$$

$$u = \frac{-\dot{V}y}{\pi L} \frac{x^2 + y^2 - b^2}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2b^2 + y^4 - 2y^2b^2 + b^4}$$

که b فاصله سطح بالایی دریچه تا کف، L طول دریچه و $\dot{V}$ دبی حجمی هوای مکیده شده به داخل لوله جاروبرقی است (شکل م ۴-۹۳). در این میدان جریان موقعیت هر نقطه سکون را تعیین کنید. جواب: در مرکز

۹۴-۴ جاروبرقی مسأله ۴-۹۳ را در نظر بگیرید. برای حالتی که $b = 2.0 \text{ cm}$ و $L = 35 \text{ cm}$ و $\dot{V} = 0.1098 \text{ m}^3/\text{s}$ است، نمودار برداری سرعت در نیمه بالایی صفحه xy از $x = -3 \text{ cm}$ تا $x = 3 \text{ cm}$ و $y = 0 \text{ cm}$ تا $y = 2.5 \text{ cm}$ را به دست آورید. برای درک بهتر میدان جریان تعداد زیادی از بردارها را رسم کنید. توجه: در نقطه $(x, y) = (0, 0.2 \text{ cm})$ سرعت نامحدود است و به رسم بردار سرعت در آن نقطه نیازی نیست.

۹۵-۴ میدان سرعت تخمینی داده شده برای جاروبرقی مسأله ۴-۹۳ را در نظر بگیرید. سرعت سیال در امتداد کف زمین را محاسبه کنید. ذرات گرد و غبار اغلب در نقطه‌ای که سرعت حداکثر است توسط جاروبرقی مکیده می‌شوند. این نقطه در کجا قرار گرفته است؟ آیا شما فکر می‌کنید که جاروبرقی هنگامی که ذرات گرد و غبار مستقیماً در زیر دریچه ورودی آن قرار دارند، جاروبرقی بهتر کار می‌کند؟ چرا یا چرا نه؟

۹۶-۴ میدان جریان دو بعدی و دائم در صفحه xy را در نظر بگیرید که مؤلفه x سرعت توسط رابطه زیر داده شده است:

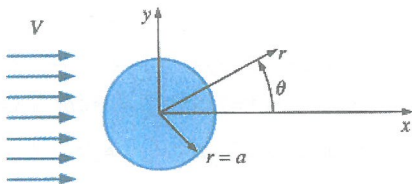
$$u = a + b(x - c)^2$$

که a ، b و c مقادیر ثابت با ابعاد مناسب می‌باشند. برای این که میدان جریان تراکم‌ناپذیر باشد مؤلفه y سرعت باید به چه شکلی باشد؟ به عبارت دیگر، عبارتی برای v به صورت تابعی از x ، y و ثابت‌های معادله داده شده به دست آورید به صورتی که جریان تراکم‌ناپذیر باشد. جواب: $-2b(x - c)y + f(x)$

۹۷-۴ اغلب جریان آزاد تقریباً یکنواخت به یک سیلندر دایروی طویل به صورت عمودی برخورد می‌کند (شکل م ۴-۹۷). مثال‌های آن شامل جریان هوا حول آنتن اتومبیل، وزش باد حول پایه پرچم یا تلفن، برخورد باد به سیم‌های الکتریکی، و جریان‌های اقیانوسی که به ستون‌های ایستگاه‌های نفت برخورد می‌کنند، می‌باشد. در کلیه این حالات، جریان در پشت سیلندر جدا شده و یک جریان غیر دائم و معمولاً مغشوش ایجاد می‌شود. با این وجود جریان در نیمه جلویی سیلندر دائم و قابل پیش‌بینی است. در واقع به استثنای لایه مرزی بسیار نازکی که در نزدیک سطح سیلندر وجود دارد، میدان جریان را با مؤلفه‌های سرعت دوبعدی و دائم در صفحه xy یا $r\theta$ به صورت زیر می‌توان تقریب زد:

$$u_r = V \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad u_\theta = -V \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

آیا جریان چرخشی است یا غیر چرخشی؟ توضیح دهید.



شکل م ۴-۹۷

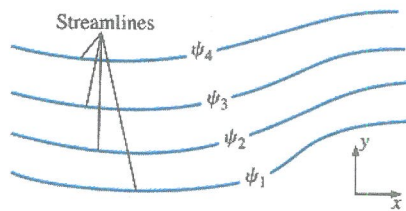
۹۸-۴ میدان جریان مسأله ۹۷-۴ را در نظر بگیرید (جریان حول یک سیلندر دایروی). نیمه جلویی را در نظر بگیرید ($x < 0$). فقط یک نقطه سکون در نیمه جلویی میدان جریان وجود دارد. این نقطه کجاست؟ پاسخ خود را در هر دو مختصات استوانه‌ای (r, θ) و کارترین (x, y) ارائه کنید.

۹۹-۴ نیمه بالا دست ($x < 0$) میدان جریان مسأله ۹۷-۴ را در نظر بگیرید (جریان حول یک سیلندر دایروی). حال پارامتری را تحت عنوان تابع جریان ψ معرفی می‌کنیم که در جریان‌های دو بعدی مقدار آن در امتداد خطوط جریان، ثابت است (شکل م ۹۹-۴). میدان سرعت مسأله ۹۷-۴ طبق رابطه زیر به تابع جریان مرتبط می‌شود:

$$\psi = V \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$$

(الف) با ثابت قرار دادن ψ ، معادله‌ای برای یک خط جریان به دست آورید (تذکر: از معادله درجه دوم برای حل r به صورت تابعی از θ استفاده کنید).

(ب) برای حالت خاص $V = 1 \text{ m/s}$ و شعاع سیلندر $a = 10 \text{ cm}$ ، تعدادی از خطوط جریان در نیمه بالا دست جریان را رسم کنید ($90^\circ < \theta < 270^\circ$). برای سازگاری، ترسیم را در محدوده $-0.4 \text{ m} < x < 0$ ، $-0.2 \text{ m} < y < 0.2 \text{ m}$ با مقادیر تابع جریانی که به صورت زوج در فاصله $0.16 \text{ m}^2/\text{s}$ و $-0.16 \text{ m}^2/\text{s}$ قرار گرفته‌اند انجام دهید.



شکل م ۹۹-۴

۱۰۰-۴ میدان جریان مسأله ۹۷-۴ را در نظر بگیرید (جریان حول سیلندر دایروی). نرخ‌های کرنش خطی یعنی، ϵ_{rr} و $\epsilon_{\theta\theta}$ را در صفحه $r\theta$ محاسبه کنید. در مورد این‌که پاره‌خط‌های سیال در این میدان جریان کشیده شده (یا جمع می‌شوند)، بحث کنید. (تذکر: تانسور نرخ کرنش در مختصات استوانه‌ای در مسأله ۹۱-۴ داده شده است).

۱۰۱-۴ بر اساس نتایج حاصل از مسأله ۱۰۰-۴ در مورد تراکم‌پذیری (یا تراکم‌ناپذیری) جریان بحث کنید. جواب: جریان تراکم‌ناپذیر است.

۱۰۴-۴ میدان جریان مسأله ۴-۹۷ را در نظر بگیرید (جریان حول یک سیلندر استوانه‌ای). نرخ کرنش برشی $\epsilon_{r\theta}$ در صفحه $r\theta$ را محاسبه کنید. آیا ذرات سیال در این جریان با برش دچار تغییر شکل می‌شوند یا نه. (تذکر: تانسور نرخ کرنش برشی در مختصات استوانه‌ای در مسأله ۴-۹۱ داده شده است).

مراجع و متون پیشنهادی

1. R. J. Adrian. "Particle-Imaging Technique for Experimental Fluid Mechanics," *Annual Reviews in Fluid Mechanics*, 23, pp. 261-304, 1991.
2. J. M. Cimbala, H. Nagib, and A. Roshko. "Large Structure in the Far Wakes of Two-Dimensional Bluff Bodies," *Journal of Fluid Mechanics*, 190, pp. 265-298, 1988.
3. R. J. Heinsohn and J. M. Cimbala. *Indoor Air Quality Engineering*. New York: Marcel-Dekker, 2003.
4. P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. San Diego, CA: Academic Press, 1990.
5. W. Merzkirch. *Flow Visualization*, 2nd ed. Orlando, FL: Academic Press, 1987.
6. G. S. Settles. *Schlieren and Shadowgraph Techniques: Visualizing Phenomena in Transparent Media*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
7. M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.
8. F. M. White. *Viscous Fluid Flow*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.